Møtet med x – dagens latin?

En studie av elevers tenkning i og om algebra.

Kristin Viumdal

Masteroppgave i realfagsdidaktikk

Institutt for lærerutdanning og skoleutvikling

UNIVERSITETET I OSLO

Mai 2010

År: 2010

Tittel: Møtet med x – dagens latin. En studie av elevers tenkning i og om algebra.

Forfatter: Kristin Viumdal

http://www.duo.uio.no/

Trykk: Reprosentralen, Universitetet i Oslo

Forord

I denne oppgaven har jeg sett på elevers tanker i ulike typer algebraoppgaver og de samme elevenes tanker om algebraemnet. For å belyse temaet har jeg sett på ulike oppfatninger og definisjoner av hva som er algebraens kjerne eller vesentligste aspekt, sett nærmere på algebraens historiske tilblivelse og ulik teori og forskning omkring utviklingen av algebraisk kunnskap, og også typiske misoppfatninger, hos elever. Avslutningsvis har jeg gjort en undersøkelse for å se nærmere på en gruppe elevers tenkning og misoppfatninger i algebra, sammen med deres tanker omkring temaet algebra.

En beskrivelse av prosessen jeg opplever er beskrivende er det gamle ordtaket; ”veien blir til mens man går”. Arbeidet har vært interessant og spennende om enn til tider frustrerende og overveldende, søket med hensyn til oppgavetema og problemstilling har i prosessen blitt snevret betydelig inn og jeg opplever at jeg har fått innblikk i mange aspekter av emnet algebra som jeg ikke før hadde tenkt over. Jeg har dermed lært en masse både med hensyn på emnets og skolens historie, plass i skolen i ulike epoker, utvikling i læreplaner og tilnærming i læreplaner og læreverk, samt tanker om hvilke aspekter av emnet som er vesentlige og hvilke tilnærminger som kan være fruktbare i undervisningen. Undersøkelsen har gitt meg et innblikk i hvordan en gruppe med elever som i utgangspunktet ikke velger å lære mer matematikk enn de ”må”, tenker i ulike typer algebraoppgaver og omkring algebraen, og jeg opplever at jeg har gjort meg flere tanker og erfaringer som vil være nyttige i mitt videre arbeid som lærer i matematikkfaget.

Arbeidet har med andre ord vært vellykket med tanke på egenutvikling og faglig ettertanke, på tross av at det til tider har vært slitsomt å ha dette hengende over seg ved siden av jobb og familieliv.

Professor Gunnar Gjone ved ILS har vært en god veileder gjennom hele perioden med gode råd og ideer for videre arbeid.

Jeg vil også takke min kjære Håkon som har støttet og oppmuntret meg gjennom hele prosessen, kommet med gode innspill som for eksempel da statistikkverktøyet jeg hadde planlagt å bruke var utgått på dato og tiden knapp, og det helt ordinære regnearket ble min redning eller da korrekturlesing måtte skje i all hast.

Til slutt vil jeg takke alle mine kjære barn Karoline, Aleksander, Kristoffer og Jonatan som til tider har måttet leve med en noe vel stresset mor i huset.

Innhold

I begynnelsen.

Hvorfor akkurat algebra?

I mine studier som er i ganske ulike fagkretser og fra forskjellige fakulteter, har jeg mange ganger observert studenter med svak matematikkfaglig bakgrunn, i møte med ulik informasjon enten av statistisk karakter, en grafisk fremstilling eller ulike beregninger for å støtte et faglig synspunkt. Det som har forbauset meg er hvordan den aktuelle informasjonen oppfattes som helt utilgjengelig for dem, mine medstudenter, dersom det er benyttet en bokstavvariabel i den matematiske fremstillingen. Et 10 år gammelt minne jeg har i den forbindelse, er om en dyktig medstudent på statsvitenskap grunnfag som i en statistikktime utbrøt noe i nærheten av ”dette skjønner jeg ingenting av, for når den bokstaven står der, så er det akkurat som å trekke ned en rullgardin foran fjeset mitt”, om et helt enkelt algebrauttrykk. Dette utsagnet gjorde meg nysgjerrig på om det er mange som opplever det sånn, at de får en eller annen form for ”matematikkskrekk” etter erfaring med bruk av bokstaver i matematikken. Opplever en del av elevene algebra som vanskeligere, enn resten av matematikken? Fokuset i denne oppgaven er således på den elevgruppa som ikke umiddelbart foretrekker matematikkfaget eller, med hensyn til studiefag i videregående skole, satser på matematikken – ei gruppe som for øvrig utgjør majoriteten av elevene.

Fra egen ungdomsskoletid og begynneropplæring i algebra, kan jeg godt huske følelsen av at dette arbeidet var meningsløst, det hele dreide seg om manipulering av uttrykk mot et eller annet mål, som jeg ofte ikke kom til før, jeg hadde sjekket med fasiten i læreboka. Vi elever, klaget også til matematikklærere, hvorfor skulle vi gjøre dette så vanskelig, når det kunne løses så enkelt uten disse bokstavene. Men så, etter hvert ga det mening, gjorde det mulig å håndtere vanskelige problemer i en fei og var ikke så meningsløst lenger. I dag tenker jeg på hvor mange som kommer dit i læringsprosessen, kontra hvor mange som blir sittende igjen med det første inntrykket av meningsløs manipulasjon? Poenget her er selvsagt ikke at alle må ha en slik læringsutvikling, men at jeg i læreryrket stadig opplever elever som jeg mistenker, opplever algebraen som meningsløs, som ikke når frem til noen nytteerfaring og som er vanskelig å motivere for å lære dette. Noen ganger undres jeg over om algebraen på en måte har fått den posisjonen i skolen som latinen en gang hadde, det vil si at ”ingen” vet helt hvorfor de skal lære det, ”ingen” opplever å ha bruk for det utenfor klasserommet, men det skiller klart mellom de ”flinke” og de andre. Nå er ikke det min opplevelse av algebra, for meg er algebra blant annet et kraftfullt og nyttig verktøy for å modellere problemer, finne løsninger på disse og si noe generelt i matematisk språkdrakt, men spørsmålet i denne sammenheng er hvordan majoriteten av elevene opplever emnet, og ikke hvordan jeg opplever det.

Spørsmål jeg sitter med, er; Får elevene noen forståelse av hva algebra er? Hvordan opplever elever algebraen? Opplever de algebra som nyttig i livet, hverdagen, skolen eller er all eventuell ytteopplevelse knyttet til faget og eksamen? Vekker emnet noen interesse? Kan de tenke seg å lære mer eller å bruke dette i arbeidsliv og utdanning? Har elevene et mer anstrengt forhold til algebra enn til andre matematikkemner?

Et tredje moment til ettertanke. I min jobb som lærer, har jeg utallige ganger blitt konfrontert med spørsmålet; Hvorfor skal vi lære dette? Men kun en gang på lærerværelset og av en kollega, som ikke så poenget med at hele befolkningen skulle lære noe så ”unyttig” som algebra, som i tillegg til å være lite nyttig i dagliglivet, ifølge denne læreren, også i stor grad skilte elever ut som vinnere og tapere, noe vårt samfunn ikke trengte var hans poeng. Jeg ble ham svar skyldig, som nyutdannet lærer i den situasjonen, men han fikk meg til å undres over hva elever, og gjerne da de elevene som ikke foretrekker matematikk fremfor mange andre skolefag, tenker om algebra. Det var for øvrig denne samme kollegaen som i en vending kalte algebra for ”dagens latin”, som dermed har inspirert deler av første del av denne oppgavetittelen.

Norge er et av få land som deltar i begge de to store internasjonale undersøkelsene TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) omkring elevers kunnskaper i skolens realfag, og PISA - undersøkelsen i regi av OECD, omkring læringsutbytte i skolens basisfag, med ulike fokusfag i hver studie. I begge disse undersøkelsene, har elever i Norsk skole vist helt gjennomsnittlige kunnskaper og forståelse i matematikkfaget, ikke helt i tråd med forventningene til innbyggere, politikere og journalister i det som er kåret til ”verdens beste land” å bo i. I sin masteroppgave, analyserer Ellen Konstanse Hovik (2006) dataene fra TIMSS, og hun konkluderer med at det har vært en negativ utvikling med hensyn til elevers kunnskaper i matematikk, og at algebra og tallregning ser ut til å være det området der tilbakegangen er størst. Nok en gang tenker jeg på relasjonen norsk skole og algebra. Jeg blir nysgjerrig på blant annet disse temaene; Hvilke tanker har elevene om hvordan man best lærer algebra? Hva tenker elever når de forsøker å løse ulike utfordringer eller oppgaver av algebraisk karakter? Hvilke misoppfatninger er utbredt? Hvilke andre matematikkemner knytter elevene algebraen sammen med?

Disse tre ulike minnene, sammen med det å sette seg inn i de omtalte internasjonale undersøkelsene, vil jeg si var avgjørende for at jeg landet på masteroppgavetittelen:

”Møtet med x – dagens latin? En studie av elevers tenkning i og om algebra”.

Masteroppgavens innhold.

Masteroppgaven har følgende struktur og kapitelinndeling. I det første kapitel ”I begynnelsen” begrunner jeg valg av problemstilling og forsøker å forklare hvorfor jeg ga meg i kast med akkurat dette arbeidet. Innledningen gir også en oversikt over oppgavens struktur og innhold. Det neste kapitelet ”Problemstilling og metode” forsøker å spesifisere hva som er målet med oppgaven, altså definere hva problemet er. I tillegg forsøker jeg her å redegjøre for hvordan jeg har til hensikt å innhente den aktuelle informasjonen og hvilke metoder jeg benytter i arbeidet med problemstillingen.

Den tredje delen av oppgaven ”På sporet av algebra” tar for seg algebrabegrepet, ulike forsøk på å definere hva algebra egentlig er, fenomenets historiske fremvekst og ulike aspekter. Jeg går kort inn på ulike tilnærminger til fenomenet i de didaktiske fagmiljøene og ulike vektlegginger av hva som er algebraens mest fremtredende aspekter eller sider. Dette fokuset på hva som er algebraens mest fremtredende aspekter fortsetter i det fjerde kapitel; ”Hvordan lære algebra?”, som er masteroppgavens teorikapitel, der jeg ser nærmere på noen ulike perspektiver på læring og undervisning, med særlig vekt på algebralæringen og opplæringen.

Det femte kapitel ”En beskrivelse av undersøkelsen, gjort er gjort” omhandler undersøkelsen. Hva omfatter denne? Hvordan er den laget? På bakgrunn av hvilke kilder? Hvordan var gjennomføringen av undersøkelsen? Samt en diskusjon omkring undersøkelsens reliabilitet og dataenes validitet.

Det sjette kapitel ”Jeg fant, jeg fant” redegjør for og diskuterer funn i undersøkelsen, opp imot funn i andre undersøkelser og den aktuelle teorien omkring læring og misoppfatninger i algebra., og i oppgavens avslutningsdel ”En oppsummering” forsøker jeg å trekke ut de viktigste funn med hensyn på oppgavens mål, altså svaret på de innledende forskningsspørsmål, samt si noe om veien videre.

Problemstilling og metode

Det er bred enighet om at grunnleggende ferdigheter i algebra er vesentlig for mye av matematikken i videregående skole og i annen høyere utdannelse. At elevene opplever mestring og forståelse på dette feltet, er dermed grunnlaget for forståelse av all videre matematikk. Som en kollega uttalte;

> ”Elevene lærer alt vi underviser dem i her på videregående skole, men så kan de ikke algebraen fra grunnskolen og da rører de det bare til når de møter problemer eller oppgaver ”.

Om oppgavens formål.

Til grunn for denne masteroppgaven ligger det to problemstillinger.

- Hvordan tenker elever i ulike typer av algebraoppgaver?
- Hva tenker elever om emnet algebra?

I behandlingen av den første av disse spørsmålene vil jeg komme inn på typiske misoppfatninger i algebraen, vesentlige fundamenter for algebraisk tenkning og aspekter ved algebraisk tenkning, emnets historiske utvikling og elevers kunnskapsmessige utvikling og tanker og teori om hvordan utvikle fruktbar algebraforståelse, samt unngå eller få bukt med ulike misoppfatninger. Sentrale begreper er dermed misoppfatninger og diagnostisering av slike feilforestillinger.

Oppgavens andre problemstilling som omhandler elevers tanker om algebra vil diskuteres opp imot aspekter som elevers vurdering av emnets vanskelighetsgrad og nytteverdi, elevers uttrykte interesse for eller opplevelse av emnet, elevers vurdering av hvordan emnet lettest læres, algebraiske sammenhenger best uttykkes og endelig hvilke andre emner av matematikken de knytter algebraen opp imot. Sentralt begrep i denne sammenheng er metalæring, alle ikke-faglige inntrykk elever har i tilknytning til et emne.

Det er nærliggende å anta at det er en viss sammenheng mellom de to problemstillingene ”Hvordan tenker elever i ulike typer av algebraoppgaver?” og ”Hva tenker elever om emnet algebra?”, på den måten at fruktbar tenkning eller gode ferdigheter i algebraløsning fører til mer positive tanker om algebra og læring av algebra, samtidig som en kan tenke seg at positiv innstilling, tanker og holdning til emnet vil kunne føre til bedre ferdigheter i det samme emnet. Den videre behandlingen av problemstillingene i oppgaven vil da også komme inn på slike sammenhenger der en kan finne det.

Et mer personlig utbytte.

Oppgavens hensikt mer indirekte er altså å vinne, for meg ny, kunnskap, som kan være et grunnlag for videre utvikling og undervisning i emnet. Kunnskap som kan gi en bedre forståelse for en del av elevens tanker og opplevelse, og forhåpentlig sette meg bedre i stand til å gi en del av elevene en annen opplevelse enn den de har i dag, siden vi kan se av internasjonale og nasjonale undersøkelser at elevenes utbytte og holdning til faget ikke er slik vi matematikklærere kunne ønske oss.

Veien mot målet – metoder i arbeidet.

Som bakgrunnsmateriale for oppgavens problemstilling og tema, og for å finne forskningsbaserte svar på den første av problemstillingene som ble reist innledningsvis, har jeg utført ulike litteraturstudier. I arbeidet med å definere algebrabegrepet, å få oversikt over algebraens vesentlige aspekter og historie, samt finne innspill og teori omkring hvordan algebralæringen eller utvikling i algebra skjer, og hvordan ulike misoppfatninger innen tema oppstår og kan unngås, har jeg vært en flittig bruker av biblioteket. Jeg har studert ulike forskningsrapporter, fagdidaktiske artikler, tidligere masteroppgaver og doktoravhandlinger. Litteraturlistene i mange av disse verkene har igjen ledet meg til andre kilder, mens ulike emnesøk i bibliotekbasen Bibsys har vært til uvurderlig hjelp i innsamlingsfasen. Jeg har også sett på artikler og teoretikere som tar for seg læring i et mer generelt perspektiv. En vesentlig del av svaret med hensyn til oppgavens første problemstilling finner jeg altså i tidligere studier, teorier og avhandlinger omkring utvikling av algebraisk kunnskap og misoppfatninger, samt i matematikkdidaktiske teorier om hva som kjennetegner algebraisk tenkning og oppgaveløsning.

For å belyse hva en del av elevene tenker i og om algebra har jeg også gjort en spørreundersøkelse, med en del spørsmål hentet fra KIM - prosjektets undersøkelse omkring misoppfatninger i algebra og en del selvlagete spørsmål som omhandler elevenes holdninger, opplevelse og tanker omkring algebra. Ved å analysere resultatene i denne undersøkelsen forsøker jeg å komme med et mer utfyllende svar på den første av denne oppgavens 2 problemstillinger, samt å belyse den andre problemstillingen som omhandler elevers tanker om algebra. Med hensyn til dette aspektet har jeg ikke funnet noe tidligere studier eller forskning som kan styrke eller svekke mine funn eller som kan belyse den aktuelle problemstillingen med et annet utgangspunkt.

Utvalget i min studie er tatt av elever som i utgangspunktet ikke velger matematikkfaglig fordypning på videregående skole, for å se hva nettopp elever som kanskje ikke mestrer eller liker så godt emnet eller i hvert fall ikke liker eller lykkes så godt i faget, tenker om algebra. Det skjeve utvalget fører til at en ikke kan trekke allmenngyldige konklusjoner med gyldighet for elever generelt, på bakgrunn av materialet. Spørsmålene eller oppgavene i undersøkelsen er av både kvalitativ og kvantitativ karakter, og jeg vil gi en statistisk behandling av de innsamlete data og analyse av data av mer kvalitativ karakter i kapitel 6. Jeg vil redegjøre mer for hvordan undersøkelsen ble utført i kapitel 5.

På sporet av algebra

Hva er algebra?

For å kunne analysere ”Hvordan tenker elever i ulike typer av algebraoppgaver?” og ”Hva tenker elever om emnet algebra?”, er det vesentlig å få klarhet i hva som ligger i begrepet algebra og hva ulike forskere betrakter som algebraens vesentligste aspekter eller vesentlig ved algebraisk tankegang. I dette kapitelet vil jeg derfor komme nærmere inn på begrepet algebra og dets betydning. Som på det meste ellers i livet råder det i fagmiljøene ulike syn på hva som er algebraens kjerne og hovedaspekter. Denne oppgaven vil i all hovedsak konsentrere seg om den elementære algebraen slik den presenteres og behandles i grunnskolen, og bruke begrepet algebra i denne mer snevre forstanden.

I dagligtale erstattes ofte begrepet algebra med det noe udefinerte begrepet bokstavregning og knyttes dermed til bruk av symboler i matematikken. Av de som godt erindrer sine skoledager og matematikktimer, vil algebra kanskje assosieres med ett sett med regneregler og likningsløsning, eller de vil betrakte algebra som ett verktøy som muliggjør behandling av ulike matematiske problemer og situasjoner.

Slik jeg tenker om algebra, ett syn jeg også finner hos matematikkdidaktikeren Wheeler (1996), er det ikke helt enkelt å finne en definisjon av begrepet eller å bryte algebra ned til en liste over basiskomponenter. I sitt forsøk på å finne en egnet beskrivelse av algebraen, som sier noe om dens kjerne, gjør Wheeler følgende observasjon som det er enkelt å slutte seg til.

> ”A difficulty in defining algebra is that when one thinks one has got hold of its essens, other aspects occur to one and have to be made room for.”
>
> (Wheeler, 1996).

Med dette i minnet vil herved se på algebra, hva det nå enn er, fra ulike perspektiver. Jeg vil ta utgangspunkt i begrepet, definisjonsforsøk, opprinnelse og etymologiske innhold. Deretter vil jeg gå deskriptivt til verks å se på hva som klassifiseres som algebra på ulike nivåer i utdanningssystemet, før jeg ser nærmere på den historiske utviklingen av algebraen slik vi kjenner den i dag. Etter dette vil jeg se nærmere på fenomenet og begrepet algebra og ulike syn på hva som er dets kjerne eller kjennetegn, hvordan det bør tilnærmes i innlæringen og ganske kort på hvilke feilforestillinger eller misoppfatninger som er typiske.

Når ulike leksikon kort skal forklare algebra.

For de fleste faglærere vil jeg tro algebra står frem som en essensiell del av matematikken og faget, uten at de på direkten kan gi noen fullgod begrepsdefinisjon eller lett peke ut algebraens kjerne. Enkelte vil kanskje forklare algebra som en av matematikkemnets grener eller hovedområder, andre knytte begrepet til symbolbruk og bestemte regneoperasjoner, eller de vil bruke generelle vendinger omtrent som nettsidene til Aschehougs Store norske leksikon, der algebra ” defineres som læren om ligninger og regning med tall og variable”. Å knytte algebra til likningsløsning har tradisjonelt vært ganske utbredt, men er ikke så vanlig lenger, i hvert fall med hensyn til begrepsdefinisjon, ingen av de andre leksikalske verk jeg har sett i gjør dette.

At algebra knyttes til bruk av variabler er noe som går igjen i flere definisjonsforsøk. I følge nettsidene til Caplex kan algebra forstås som ”studiet av operasjoner (regning) med tall og variable”, noe som skulle tilsi at aritmetikk var en del av algebraen. En måte å betrakte dette på som jeg har lest tillagt den moderne matematikken, er en forståelse av matematikken som delt i tre hovedgrener; geometri, algebra og analyse, der algebraen, altså studiet av regning med tall og variabler, skilles fra analysen ved at algebraen konsentrerer seg omkring endelige verdier og prosesser, mens analysen tar for seg det uendelige.

Å knytte algebra til bruk av variabler eller symboler er som sagt noe som går igjen i forklaringsforsøkene og symbolbruk er vel ofte det som gjør oss oppmerksom på algebraen i matematikken, men som det historiske tilbakeblikket på algebraens utvikling vil vise, kan algebraisk tankegang eksistere uavhengig av symbolbruk.

Andre nettleksikon, deriblant det ikke alltid pålitelige Wikipedia, vektlegger andre aspekter ved fenomenet og forklarer svært generelt slik i sine engelske nettsider; “Algebra is a branch of mathematics concerning the study of structure, relation and quantity”. Fenomenet forklares altså som en av matematikkens grener og knyttes til studier av matematiske strukturer, relasjoner og kvantiteter, og siden Wikipedia ikke er alene om denne forståelsen er den kanskje verdt å ta med her. I organisasjonens norske nettsider forklares algebra noe mer spesifisert som en ”generalisering og utvidelse av aritmetikk”.

Det ser det dermed ut til å herske enighet om dette: Algebra er nært knyttet til aritmetikken.

Begrepet algebra – etymologisk begrepsavklaring.

Selve begrepet algebra har sin opprinnelse i det arabiske ordet: al-jebr, som betyr gjenforening eller kombinasjon. Ordet opptrer i titler på bøker av Mohamed Ibn musa Al-Khwarizmis (800-850). Deriblant læreboken Algebr Wal muqabala som omhandler forenklinger av likninger ved hjelp av de 4 regningsarter. Metoden som i skolesammenheng ofte har vært presentert som "flytt og bytt", det at man ved å bruke de 4 regningsartene kan opprettholde likevekten i det matematiske uttrykket, samtidig som man eliminere ledd og isolere den ukjente. Al-jebr beskrev det å addere og multiplisere med felleskomponenter på begge sider av en likning for å eliminere ledd, mens det parallelle begrepet al-muquabala beskrev det å subtrahere og dividere begge sider i en likning med felles ledd. Den fundamentale betydningen av begrepet var å sammenlikne, stille opp det motsatte av, å utlikne (Mason, 1996).

Tidligere hadde det vært vanlig å studere og løse konkrete problemer som kunne lede frem til andregradslikninger, men Khwarizm studerte og betraktet andregradslikninger som egne matematiske objekter og beskrev slik likningsløsning i mer generelle termer. Da dagens formelle algebraiske notasjon ikke var utviklet ennå, ble løsningen gitt i form av språklige regneregler. Khwarizm regnes av flere som algebraens grunnlegger.

Et rent etymologisk perspektiv på begrepet algebra gir dermed en prosedyreorientert oppfattning av begrepets innhold, det vil si algebra forstått som de generelle metodene for likningsløsning. En slik prosedyreorientert oppfatning omkring algebra, der algebra først og fremst er noe vi "gjør", vil av de fleste matematikkdidaktikere ansees som en for snever begrepsforståelse.

Algebra – en tematisk begrepstilnærming

En måte å komme nærmere hva som legges i begrepet algebra er å gå deskriptivt til verks, rett og slett kikke i forskjellige læreverk eller leksikon etter hva som der er kategorisert som algebra. Nå kan jo algebraisk stoff tas opp i ulike lærebøker uten å bruke eller knytte betegnelsen algebra til stoffet, men i denne delen av oppgaven vil jeg se på hvilket stoff som presenteres som algebra eller knyttes opp mot selve algebrabegrepet.

Siden oppgaven her dreier seg om ungdom og algebra er det naturlig for meg å ta utgangspunkt i ett par læreverk for ungdomstrinnet som jeg selv tidligere har brukt i undervisningssammenheng. Den første læreboka er "Mega 8b" (Guldbrandsen, Melhus, 1997) tilpasset Reform 97 og neste lærebok jeg ser på her er "Regnereisen 8a" (Breiteig, Pedersen, Skoogh, 1993) laget til Mønsterplanen av 1987. Etter dette vil jeg se på en egen tidligere lærebok fra videregående skole, "Matematikk 3MN" (Erstad, Bjørnsgård, 1987), og ulike læreverk for påfølgende matematikkstudier. (Disse lærebøkene finnes i litteraturlisten). Jeg velger disse lærebøkene fordi disse er lettest tilgjengelig. Det begrensede bokutvalget vil selvfølgelig ha innvirkning på utfallet, men da hensikten her er å belyse algebra fra ulike hold, opplever jeg ikke dette som særlig problematisk. Helt til sist i denne oppgavedelen vil jeg kort som supplement, titte på leksikalske beskrivelser av algebrafenomenet og dets forgreininger.

Algebrakapitelet i "Mega 8b" (Guldbrandsen, Melhus, 1997)" kalles "Tall og Algebra" og inneholder følgende fagstoff; betydningen av likhetstegnet (=), regler for regning med parenteser og øvelser i dette, en kort del om hvordan man lager regneuttrykk og jobber med problemer som involverer variable uten at elevene møter symboler for variabelen, før læreboka fokuserer på bruk og forståelse av symboler og også variabelbegrepet. Temaer som likninger, ulikheter, grafer og funksjon er behandlet i egne kapitler og ikke knyttet direkte til algebrabegrepet. Algebra er i læreverket først og fremst knyttet til formelle regneregler og symbolbruk, men med oppmerksomhet på god begrepsdannelse.

I "Regnereisen 8a" (Breiteig, Pedersen, Skoogh, 1993) kalles ett av kapitlene "Algebra", første delkapitel i dette hovedområdet heter "Matematikkens språk, Algebra", noe som kanskje oppsummerer forfatternes syn på algebra. I algebradelen av læreboka behandles følgende tema; variabelbegrepet, flytdiagram, lag en formel, regler for symbolregning, parentesbruk og uttrykksmanipulering, potenser, likningsløsning og "tallvegen" – en visualisering av likningssett med 2 ukjente. I dette læreverket er algebra bundet mer opp mot funksjonslære og likningsløsning, og i ennå større grad enn i foregående lærebok, knyttet til bruk av formelle regneregler ved bruk av symboler i matematikkuttrykk.

Ser jeg på tidligere lærebøker i matematikk for videregående skole eller matematiske emner på universitetsnivå finnes ingen definisjon av begrepet algebra eller egne kapitler med algebra som tema. Dette, samtidig som bruk av det algebraiske symbolspråket nærmest gjennomsyrer alle de matematiske emner som behandles i lærebøkene, både med hensyn til pensumgjennomgang og oppgaveregning. Den sentrale plass det algebraiske symbolspråket innehar i disse lærebøkene viser at symbolspråket, er noe mer enn ett matematisk tema. Dette medfører at en tematisk avgrensing av algebraiske og ikke algebraiske emner i matematikken dermed blir lite anvendelig og virker oppkonstruert.

I den grad selve algebrabegrepet nyttes i universitetslærebøkene er det gjerne i sammenheng med andre matematiske begreper som i uttrykk som "lineær algebra", "abstrakt algebra", "algebraens fundamentalteorem", "algebraiske funksjoner", "the algebra of power series" eller "the algebra of vectors". Algebra som universitetsfag spenner over ett vidt felt og fokuserer ofte på matematiske strukturer mer enn løsningsprosedyrer. I fagemnene berøres alt fra variabler og vektorer, til matriser, avbildninger og funksjoner.

Algebra som fag er ifølge det store norske leksikon, inndelt i ulike forskningsgrener som; elementær algebra, funksjonsanalyse, abstrakt algebra, lineær algebra, universell algebra, datamaskin algebra og boolsk algebra. Det er innenfor hver enkelt av disse forskningsemnene at emnet utvikles og fornyes, men i denne oppgaven vil jeg fokusere på den elementære algebraen, eller enda snevrere, den algebraen som elever møter i grunnskolens matematikkopplæring.

Historisk tilnærming til grunnskolens algebra.

Det eksisterer som tidligere nevnt ulike oppfatninger om hva algebra er, når algebraen kan sies å være utviklet, og hvor omfattende begrepet bør benyttes. Historisk kan man hevde at det algebraiske symbolspråket ble utviklet ut ifra et ønske om å løse likninger. Tidligere ble de to begrepene, algebra og likningsteori, brukt identisk, og frem til 1800-tallet har de to grenene av matematikken felles historie (Store norske leksikons nettsider).

Historisk epoker i algebraens utvikling/fremvekst.

Som tidligere nevnt eksisterer ulike oppfatninger omkring algebraens historiske utvikling og ulike vinkler å betrakte historien fra. Først og fremst er det viktig å merke seg at det ikke er en historie, men flere historiske løp i ulike kulturer som til tider smelter sammen, andre ganger starter i en kultur for nærmest ”å dø ut” der, men bli videreført i andre geografiske områder. Studiet av algebraens utvikling kan blant annet ta utgangspunkt i ulike kulturelle områder, hvilke type problem og løsningsmetode man var opptatt av eller matematikerne som utviklet algebraen slik vi kjenner den i dag.

I denne oppgaven velger imidlertid jeg å bruke en inndeling av utviklingen i 3 faser, funnet blant annet hos Mason (1996). I første fase møter vi en retorisk algebra, kjennetegnet ved at det matematiske innholdet er beskrevet med vanlige språk. Den neste fasen i utviklingen kalles synkopert algebra, og her tar matematikerne gradvis i bruk forkortelser når de gir og løser matematiske problemer. I den 3. fasen møter vi symbolsk algebra, nå gjør matematikerne bruk av abstrakte symboler og formelsspråk.

En slik faseinndeling av historisk utvikling har den svakhet at den på sett og vis overstrukturer historien og skaper klarere skiller, der utviklingen flyter sakte men sikkert videre. Når jeg allikevel velger denne studievinkelen og går forholdsvis nøye inn på hver historisk fase, så er det både fordi den kan være velegnet til å skape oversikt over noen hovedtrekk i den historiske utviklingen, men også fordi den ifølge ulike forskere, deriblant Mason (1996), kan være fruktbar med tanke på å forstå elevers utvikling eller mangel på utvikling, i forståelse av algebra. Elevene, argumenterer flere forskere, gjennomgår en mental algebrautvikling som er parallell til den faktisk historiske utviklingen av emnet, fra et retorisk stadium, via en synkopert variabelforståelse og variabelbruk mot en symbolsk algebraforståelse. Dette vil jeg komme mer tilbake til i neste kapitel av masteroppgaven.

Den historiske fremstillingen i denne omgang, vil i hovedsak bygge på Torgeir Onstads redegjørelse i ”Fra Babel til Abel. Likningenes historie” (1994) og artikkelen ”Algebraens historie” (Svege, Thorvaldson).

Retorisk algebra

Retorisk algebra regnes å ha sin opprinnelse i Egypt og Mesopotamia, (ofte referert til som Babylon), for ca 4000 år siden. I ca 3000 før Kristus vokste det fram en sivilisasjon i Nil-dalen og omkring Nilens delta. Landet, som var fruktbart, kaltes for ”kemet” som betyr ”svart jord” og det lå skjermet til rent geografisk. Gode avlinger og politisk stabilitet ga grobunn for et mer avansert og velordnet samfunn, med vanningssystemer, pyramider og templer, altså bygg og konstruksjoner, som igjen krevde kunnskaper innen matematikk.

Egypterne skrev på papyrus, et svært skjørt materiale, men takket være den egyptiske tradisjonen med gravforsegling og det tørre klimaet er en del tekster bevart. De mest kjente kildene til retorisk algebra er Moskvapapyruset (1850 f Kr) og Rhindpapyrusen / Ahmes regnebok ((1650 f kr). Disse tekstene er oppgavesamlinger med løsninger, og de to papyrusene inneholder til sammen 110 oppgaver med ren og anvendt matematikk. Algebraoppgavene er i hovedsak knyttet til praktiske problemstillinger som kornlagring, forblanding, kornforbruk ved matlaging, og de gir ofte det vi i dag ville kalle lineære sammenhenger mellom variabler, det vil si lineære likninger.

Også i Mesopotamia vokste det på denne tiden fram et velordnet samfunn. I denne kulturen ble det utviklet en teknikk med å prege og deretter brenne leirtavler, og det hovedsakelig fra de ca 400 bevarte leirtavlene med matematisk innhold at vi har kjennskap til babylonsk matematisk tenkning. Som tallsystem utviklet Babylonerne et posisjonssystem med 60 som base, et tallsystem vi fremdeles ser spor etter i vårt samfunn når vi deler inn timer og minutter i 60. Det er fra den babylonske kulturen vi har den kanskje eldste teoretiske matematiske tekst som eksisterer, ”Plimpton 322”, datert mellom 1900 og 1600 før Kristus. Tavlen inneholder en oversikt over pytagoreiske talltripler. Algebratekstene er også i denne kulturen ofte knyttet til praktiske problemer, men i noen grad også gitt som tabeller med for eksempel kvadrattall og kubikktall.

Det eksisterer også kilder fra andre kulturer som viser algebraisk tenkning som vi ville kategorisere som retorisk i sin form, men da disse kildene er yngre vil jeg ikke komme nærmere inn på dem her.

Hele den historiske fasen der algebraen kan betegnes som retorisk, kjennetegnes som sagt ved at matematikken blir beskrevet verbalt i vanlige ord og setninger. Ukjente størrelser kan i ordlikningene erstattes av uttrykk som ”lengde”,” bredde” og liknende, og etter hvert tas det i bruk begreper som en ”haug” eller ”stabel”. Matematikerne jobbet med problemer som i hovedsak ville tilsvare algebrauttrykk eller likninger av første, annen og i noen grad tredje grad. I algebrauttrykk av første og annen grad fant de i hovedsak løsningene eller gode tilnærminger for løsningene, mens for likninger av tredje grad var deres løsningsmetoder nokså utilstrekkelig og de fant ofte kun noen av løsningene eller ingen.

Metoden man brukte for å løse problemene kalles ”regula fasi” hvilket betyr noe slikt som ”feil plassering”. Kort fortalt går metoden ut på at man gjetter en verdi på den ukjente størrelsen og gjør beregningene i problemet, deretter vurderer man hvor stor feil dette valget av ukjent gir, for så å justere opprinnelig inputverdi og utføre beregningene på ny. Løsningsmetodene var altså av numerisk karakter, de ga ikke alltid det korrekte svaret og de førte ikke alltid frem i den forstand at noen problem vi i dag løser, den gang måtte ansees som uløselige.

Et eksempel på en slik retorisk oppgave er problem nr. 26 fra Rhindpapyrusen:

En "hau" og en kvart gir tilsammen 15. Regn med 4, legg til 1/4 dvs. 1 og tilsammen 5. Del ut 15 med 5 og får 3. Endelig multipliser 4 med 3 og får 12. Den søkte "hau" er 12.

Teksten beskriver som leseren selv kan se, først oppgaven i en tekst, vi ville for samme problemstilling sette opp likningen slik: $x + x/4 = 15$. Deretter forsøkes ordlikningen løst med verdien 4 for den ukjente ”hau” og oppgaveskriveren påpeker at dette til sammen ville gi verdien 5, og siden 5 multiplisert med 3 gir 15 som produkt, må 4 multiplisert med 3 løse ordlikningen argumenterer oppgaveskriveren. Teksten demonstrerer oppgavens retoriske form, ”regula fasi” metoden og forfatterens forståelse av proporsjonalitet. Ordlikningen innebærer en jakt på variabelen, beskrevet med ordet hau, som den ukjente verdien som løser et gitt problem. Variabelforståelsen på dette nivået konsentrer seg om ukjente verdier på kjente objekter.

Den retoriske algebraen utviklet seg i siste del av denne fasen videre med de greske filosofene, da særlig Pytagoras (ca.572-479 f. Kr.) og Euklid (ca. 300 f. Kr). Som filosofer var de opptatt av hvorfor sammenhenger var slik som de tidligere matematikere hadde funnet ut, og de utviklet den matematiske bevisføring i sine arbeider. Algebraen ble gjennom filosofenes virke nærere knyttet til geometrien, enkelte har sågar kalt det ”geometrisk algebra”. Euklid innledet avslutningen av den retoriske fasen av algebraens historie, da han i sine tekster tok i bruk bokstaver for å uttrykke lengden på ukjente linjestykker i gitte geometriske figurer.

Synkopert algebra

Synkopert algebra, blir av de fleste sett på som en overgangsfase mellom en algebra i muntlig form på tross av at den er nedskrevet, og formell skriftlig algebra. Denne overgangsfasen kjennetegnes ved at man tar i bruk symboler, det vil si bokstaver, for å uttrykke ukjente størrelser. Symbolene fungerte på sett og vis som forkortelser, i et ellers retorisk matematisk språk. Utover i denne epoken er det en forsiktig utvikling i symbolbruk, i den forstand at det tas i bruk stadig flere symboler, noe som effektiviserer det matematiske språket.

På tross av at Euklid tok i bruk bokstaver for å uttrykke ukjente lengder på geometriske figurer, er det vanlig å regne Diofantes (200-285 e. Kr.) fra Aleksandria, som den første matematiker som utvikler en mer synkopert algebra. Diofants arbeid ”Aritmetika” blir av flere ansett som høydepunktet i den greske algebraens historie og av denne grunn regnes han av enkelte som ”algebraens far”. ”Aritmetika” er et verk på 13 bøker, der 6 bøker i greske utgaver og 4 i arabisk utgave er bevart. Bøkene omhandler likningsløsning, algebraen er løsrevet fra geometrisk kontekst, og det innføres symboler for den ukjente og potenser av denne ukjente. I likninger med mer enn en ukjent, uttrykker Diofant den andre ukjente som ett lineært uttrykk av den første ukjente. I oppgaveløsningen var Diofant på jakt etter rasjonale løsninger, og han utvidet gjerne likningene slik at det da ble heltallsløsninger. Likninger hvor man ønsker heltallige løsninger, kalles den dag i dag diofantiske likninger. Diofants symbolinnføring var på mange måter forut for samtidens matematiske tenkning og mye av hans arbeid gikk etter hans død i ”glemmeboka”. I all hovedsak brukte matematikere fremdeles retorisk algebra også etter Diofant, men hans arbeid markerer allikevel det første steget mot en forandret algebra.

Ved romerrikets fall gikk den matematiske tenkningen i Europa nærmest i dvale. Islamsk ekspansjonstid førte mange historiske verk til bibliotek i denne kulturkretsen og matematikken utviklet seg videre i den arabiske kulturkretsen. Det var i denne epoken Khwarizmi virket. Han benyttet i sine arbeider algebraiske problemer knyttet til handel og økonomi, men hadde også ofte geometriske betraktninger til grunn for sine algebraiske resonnement. I all hovedsak benyttet han en algebraform vi ville definere som retorisk, men han godtok irrasjonale tall og løsninger.

Middelalderens største og mest kjente Europeiske matematiker var Leonardo Fibonacci (1175-1250). I hans ”Liber Abbaci”, som betyr ”Boken om regning”, tok han i bruk de Hindu -Arabiske tallene og argumenterte for deres overlegenhet i forhold til de romerske tallene. Mot slutten av 1400-tallet dominerte de Hindu -Arabiske tallene i de vitenskapelige kretser over hele Europa. Matematikken og dermed Algebraen hadde fått et endret og mer funksjonelt tallsystem som grunnlag.

I løpet av 1500 tallet fant matematikeren Tartaglia løsningen på tredjegradslikningen. Matematikeren Cardiamo fikk se løsningen og etter hvert publiserte han denne løsningen, og i tillegg løsningen av fjerdegradslikningen, funnet av hans student Ferrari. To av algebraens store problemer, som matematikere hadde balet med i årtusener, hadde dermed funnet sin løsning.

Algebra på synkopert nivå eller stadium tar i bruk flere symboler en retorisk algebra og en begrenset objektrelatert variabelforståelse eller symbolbruk er vanlig. Variabelbruk knyttes dermed til kjente objekter og deres ukjente størrelse eller mengde. Løsning av likninger etter mer formelle metoder tar over for de mer numeriske ”gjett og sjekk” metodene og mye ”unødig” tekst eller kontekst tas bort i oppgaveløsningen.

Omkring 1440 fant Johann Gutenberg opp den moderne boktrykkerkunsten. Man kan knapt overdrive hvilken betydning dette fikk for utbredelse av nye ideer, og dermed matematikk og algebra, selv om matematikere ikke alltid var raskt ute med å publisere sine resultater. Trykte bøker gjorde sitt til at nye symboler som ble tatt i bruk innen matematikken og algebraen, ble kjent. Algebraen i denne historiske perioden, fjernet seg stadig fra den retoriske tradisjonen, med et økende symbolspråk. Denne utviklingen fortsatte også i neste fase av algebraens historie og i løpet av ett par hundre år hadde man fått dagens symboler for alle de fire regneartene og dagens likhetstegn, i bruk.

Symbolbruken beveger seg også vekk fra symboler vi kan kalle forkortelser, som for eksempel at pluss eller addisjon tilsvarte ”p”, og over i mer abstrakte symboler som addisjon markert med ”+”. Disse faktorene løsrev matematikken og algebraen fra nasjonalspråket og førte med seg en internasjonalisering av matematikken. Det som frem til dette har vært flere parallelle historier, ble etter hvert en historisk utvikling med ett tyngdepunkt i nordligere deler av Europa.

Symbolsk algebra

Den symbolske algebraen, algebra slik vi kjenner det i dag, ble utviklet på slutten av 1500 tallet. I renessansen ”gjenoppdaget” Europa antikkens filosofi, kultur og dermed også tidligere arbeider og verk i matematikk.

Den franske matematikeren Francois Viete (1540-1603) regnes som”far” for den moderne algebra. I ”In artem analyticem isagoge” utgitt i 1591, generaliserte Viete Diofants løsningsmetoder, og boka presenterte en utvidet symbolbruk. Det nye var at han brukte symboler også for koeffisienter i likninger. Slik revolusjonerte franskmannen bruken av symboler i matematikk, ved å la symbolene representere både kjente og ukjente størrelser i matematiske uttrykk. Viete skapte med dette et nytt matematisk objekt, variabelen, som man kunne utføre beregninger med.

Det nye formelredskapet ga mulighet for å løse matematiske problemer på generelt grunnlag og uttrykke generelle løsninger som formler, ikke regneregler eller prosedyrer. Algebraspråket muliggjorde nye former for bevis og matematiske utlegninger, samt at det internasjonaliserte faget ved å gjøre disse ”tekstene” lesbare for matematikere av ulike nasjonaliteter og språk.

I tillegg til dette var Vietes tanker nyskapende, med tanke på det å finne løsninger av matematiske problemer, løsningene behøvde ikke lenger være ett tall, det kunne like gjerne være ett algebrauttrykk. Dette analyseverktøyet, som vi kaller algebra, ble ett effektivt og presist redskap for å uttrykke matematiske sammenhenger, og la grunnlaget for nærmest all senere utvikling i matematikk spesielt og realfagsvitenskap generelt.

I sine arbeider benyttet Viete konsonanter for å symbolisere kjente størrelser og vokaler for å representere ukjente størrelser. Dagens notasjon der man benytter bokstaver fra begynnelsen av alfabetet til å representere kjente størrelser og bokstaver fra slutten av alfabetet, til å representere ukjente størrelser, var det Rene` Descartes (1596-1650) som innførte.

Med det nye symbolverktøyet utviklet Leibniz (1646-1716) funksjonslære. I funksjonslæren møtte en begrepet ”variabel”, en kvantitet som kunne ha varierende verdier og som representertes gjennom bruk av symboler, det vil si bokstaver, i matematiske uttrykk. Algebra ble slik redskapet i funksjonslære, men variabelbegrepet ble med dette også en del av algebraen. I algebra brukte man bokstaver for å uttrykke generelle aritmetiske sammenhenger og funksjonslærens symbolbruk inkorporertes i begrepet variabel. Algebraen ble etter dette ofte knyttet opp imot funksjonslære.

Symbolsk algebra ga redskapet en trengte for endelig å bestemme hvorvidt det kunne oppdages en generell løsning av femtegradslikningen eller ikke. På 1800 tallet beviste Niels Henrik Abel (1802-1829) at for likninger av grad fem eller mer, kunne det ikke finnes en generell løsningsformel. Algebraiske problemer som matematikere hadde stridt med i hundrevis av år fikk endelig sin løsning, symbolsk algebra ble en viktig del av all matematikk og matematikkopplæring. Det algebraiske språket ble ett sentralt verktøy i forskning, særlig i matematiske fagfelt, noe som var med på å videreutvikle fagfeltet og utvide algebrabegrepets betydning.

Algebraforståelse på synkopert nivå tar i bruk det moderne variabelbegrepet og variabelbruken og lar bokstavsymbolene spille ulike roller i ulike oppgavekontekster eller ulike oppdrag, samt at forventningen om et svar som en eller annen ukjent tallverdi nedtones, da resultatet av oppgavebehandling like gjerne resulterer i algebraiske uttrykk. Algebraforståelse på dette nivået innebærer med andre ord en annen forståelse av likhetstegnets betydning enn hva som var påkrevet i tidligere stadier.

Retorisk algebra er begynnelsesfase historisk sett, men ifølge Mason (1996) er det som nevnt også en mental begynnelsesfase i algebralæring. For å utvikle god algebraisk forståelse er det vesenlig med en innledningsfase av retorisk karakter, der tilnærmingen bærer preg av muntlighet, konkrete oppgaver eller problemer, problemløsning gjennom forsøk og eksempler, ikke innføring av bokstavsymboler eller annet som unødvendig hever abstraksjonsnivået. Algebrainnføringen bør således i dette perspektivet følge den historiske utviklingen via en synkopert fase mot en symbolsk algebraforståelse, men der en gir rikelig tid til utviklingen av forståelse i disse første fasene, slik disse fasene varte lenge rent historisk sett. Jeg vil komme mer tilbake til ulike typer didaktisk teori som deler en eller flere av disse antagelsene, i kapitelet som omhandler teorier om læring av algebra.

Ulike aspekter ved skolens algebra.

Som den historiske gjennomgangen viser kan algebrabegrepet knyttes til blant annet det å bearbeide matematiske problemer på tross av ukjente verdier, til metoder for likningsløsning, språk eller symbolbruk i matematiske problemer. Jeg vil nå forlate det historiske perspektivet og tilnærme meg algebrafenomenet ut ifra forskningsmessige definisjonsforsøk og beskrivelser av sentrale kjennetegn eller hovedaspekter ved fenomenet.

Algebra er som kjent en sentral del av matematikken, matematikkdidaktikeren Rojano (1996) kaller det en utvidelse eller forlengelse av aritmetikken. Matematikkdidaktikeren Wheeler (1996) omtaler algebra som fullstendiggjøringen av aritmetikken og påpeker at aritmetikken ikke kunne utvikles fullstendig uten hjelp av algebraen.

Uavhengig av presisjonsnivå og nøyaktig definisjon er det utbredt enighet om at grunnleggende regneferdigheter og god tallforståelse, er nødvendige forutsetninger for algebraforståelsen. Flere forskningsstudier har konkludert med at brister i disse grunnleggende ferdighetene skaper vansker og misoppfatninger i algebralæringen for elever (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000).

Hva skiller så algebra fra resten av matematikken? Matematikkdidaktikeren Wheeler (1996) betrakter algebra som ett intellektuelt verktøy og hevder som nevnt i innledningen at det er problemfylt å bryte fenomenet algebra ned til en liste over basiskomponenter. Dette fordi man da lett ender med en liste som er for generell, der det matematiske aspektet er luket bort. I erkjennelsen av at algebraens kjerne ikke er enkelt å gripe, forslår han (Wheeler, 1996) allikevel at vi som utgangspunkt kan betrakte algebra som:

- et symbolsystem (symbolic system)
- et representasjonssystem (representational system)
- kalkulus (calculus)

Nå innebærer denne listen en kunstig oppdeling av algebraen og ingen av faktorene er i seg selv, kanskje heller ikke til sammen, nok til å beskrive algebraen. Kategoriene flyter over i hverandre og Wheeler påpeker selv at algebraen i tillegg til dette, kjennetegnes ved at den er dynamisk og transformerbar. Jeg vil på tross av innvendingen ta utgangspunkt i disse ulike aspektene av algebraen i den videre behandlingen. Deretter vil jeg se på aspekter andre matematikkdidaktikkforskere vektlegger i sine tilnærminger til algebraen.

Algebra et symbolsystem.

Matematikk er ideer, språk, søken etter struktur, orden og mønster, og i matematikken bruker vi symboler i langt større grad enn det vi som oftest tenker over. Tegnene for tallene, tegnene for ulike operasjoner – hele matematikken er preget av symbolisme og god matematikkforståelse avhenger korrekt oppfatning av de ulike symbolene. Men som regel når vi snakker om symbolbruk i matematikken, er det bruken av bokstaver for å representere ukjente, generelle, varierende eller kjente verdier, vi har i tankene.

Som den historiske fremstillingen viser, er arbeidet med ukjente størrelser på mange måter grunnleggende i algebraisk tenkning. Bruken av bokstaver for å representere andre størrelser i matematiske tekster eller oppgaver, vil ofte være det som gjør at vi enklest gjenkjenner og klassifiserer det matematiske innholdet som algebraisk. For mange, også lærere i matematikk, viser det seg at nettopp bruken eller fraværet av symboler, i form av bokstaver, avgjøre hvorvidt de finner at noe kan kalles algebra eller ikke (Stephens, 2008).

Ifølge Wheeler (1997) er bruken av bokstaver i matematikkuttrykk ikke nok til å klassifisere noe som algebraisk, han presiserer at for å ta i bruk betegnelsen algebra kreves også struktur, en form for system symbolene imellom. Denne strukturen fungerer definerende både på relasjoner, prosesser og objekter. En kan si at det algebraiske symbolverktøyet formaliserer og strukturerer den muntlige matematikken, slik skriftspråk formaliserer og strukturerer muntlig språk. Ifølge matematikkdidaktikeren Bell (Bell, 1996) er bruken av ett manipulativt symbolsk språk som hjelpemiddel i matematisk arbeid det som gjør at arbeidet skiller seg fra annen matematikk og kan klassifiseres som algebraisk. Den russiske psykologen Vygotski uttrykte ifølge heftet ”Veiledning til algebra” forholdet mellom aritmetikk og algebra slik:

> ”Writen language is to oral language what algebra is to arithmetic”
>
> (Sitert etter [Brekke, Grønmo, Rosen, 2000])

Ved dette symbolverktøyets inntreden i matematikken ble det matematiske språket mer effektivt og uavhengig av nasjonalspråkene med hensyn til tilegnelse av informasjon, men også mer abstrakt og dermed vanskelig tilgjengelig for ”hvermannsen”. Å betrakte algebra som matematikkens skriftspråk kan gi en verdifull synsvinkel på fenomenet, selv om det ikke er en nødvendighet for algebra å være skriftlig. Det som er klart er at etter Viete inkluderer begrepet algebra også et symbolspråk og symbolverktøy, som matematikken ikke kan unnvære, og som gjør det bortimot umulig å kategorisere algebraen isolert fra resten av matematikken.

Flere forskere som tenker algebra som knyttet til symbolbruk og symbolsystem nyttegjør seg av begrepet prealgebra. Prealgebra beskriver ifølge matematikkdidaktikeren Linchevski (1995) overgangen mellom aritmetikk og algebra, aritmetikk på algebraisk vis. Altså det å resonere algebraisk i ett numerisk miljø. Med å resonere algebraisk tenker jeg her på det å legge merke til mønster i aritmetikken, å arbeide med situasjoner der det er ukjente, varierende eller generaliserte tall uten å nytte symboler for disse. Et eksempel på slike prealgebraiske oppgaver er: ”$3 + 2 \cdot \square = 11$”. Prealgebraens rolle er;

> ”å utvikle de mer primitive, konkrete prebegrepene som er nødvendig for utviklingen av høyere og mer abstrakte begreper. Fordi disse prebegrepene ikke blir overflødig senere, men fortsetter å støtte de formelle begrepene må man passe særlig på å utvikle disse forestillingene på en korrekt og nyttig måte.”
>
> (Hauge, 1997)

Algebra et representasjonssystem.

Det vesentlige ved å bruke symboler eller bokstaver i matematiske uttrykk er å få representert og dermed kunne jobbet med verdier som en enten ikke vil eller kan tallfeste. Bokstaver i matematiske uttrykk benyttes i ulike situasjoner, med forskjellige representasjonsoppgaver knyttet til kontekst. I skolen må elever forholde seg til bokstaver som representanter i et vell av ulike situasjoner, noe som kan være rot til misoppfatninger. Noen ulike aspekt ved bokstavbruk identifisert av Küchemann er ifølge Nasjonalt læremiddelsenter (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000):

- bokstav brukt som benevning knyttet for eksempel til objekter
- bokstav brukt i geometrien som referent til punkt, side på gitt figur eller vilkårlig figur.
- bokstav brukt som variabel verdi i matematisk uttrykk.
- bokstav brukt som avhengig variabel i matematisk uttrykk.
- bokstav brukt som konstant verdi i matematisk uttrykk.
- bokstav brukt som parameter, dvs. vilkårlig verdi, men fast fra gang til gang i matematikkuttrykk.
- bokstav erstatter ukjent verdi som søkes i likninger
- bokstav i ulikheter erstatter uendelig antall verdier innenfor grense som gjør utsagnet sant
- bokstav til å representere generaliserte tall i for eksempel bevis

Noe av det sentrale ved denne symbolrepresentasjonen er at den på operasjonelt nivå muliggjør bearbeidelse av det matematiske problemet eller oppgaven, også på generelt nivå eller på tross av ukjente størrelser. På strukturelt nivå definerer algebraspråket relasjoner mellom ulike mengder og kan beskrives som;

> ”ett kraftig verktøy som representerer matematiseringen av ett problem av matematisk karakter, men symbolspråket synliggjør også relasjoner mellom elementene i problemet og er manipulativt i den forstand at språket er velegnet til å omforme forbindelsene og få fram nye sammenhenger.”
>
> (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000).

I tråd med dette utsagnet viser det historiske tilbakeblikket at konstruksjonen av det algebraiske representasjonssystemet, ga nye muligheter for å behandle, det vil si manipulere og transformere matematiske problemer for dermed å løse disse, samt å uttrykke matematiske generelle sammenhenger i bevis og utlegninger.

Det er altså noe av algebraens kjennetegn at den ved å representere slik den gjør, skaper struktur og definerer relasjoner (Sfard, 1991), som så kan omformes. Algebraen løser ikke bare problemer, den språklig algebraiske representasjon står i relasjon med andre matematiske representasjonsformer, noe som gir muligheter for ulike tilnærminger til ett og samme problem.

Algebra er ”calculus”.

Det engelske begrepet ”calculus” er mangetydig og ikke helt enkelt å oversette direkte. I enkelte sammenhenger oversettes gjerne begrepet med det norske begrepet ”beregninger” og da gjerne forstått som mer avanserte beregninger, men det er blitt vanligere å oversette begrepet med det fornorskede synonymet kalkulus, som i større grad knyttes til matematisk analyse. Algebra er ifølge Wheeler (1996) fundamentalt knyttet til det å finne numeriske løsninger på likninger og kjennetegnes ved å være dynamisk og transformerende, samt at algebra er ”action”. Algebraen forstått som kalkulus er på sett og vis endringsorientert, metodeorientert og løsningsorientert.

Algebra som arbeidsmetode kjennetegnes ved at man sammenliknet med aritmetikk angriper problemet ”baklengs” og ved å navngi de ønskede data kan man analysere, gjøre beregninger og omordne uttrykket for å finne en eller flere løsningsverdier. Årsaken til at algebraens analyse (calculus) virker så effektivitet er ifølge Wheeler (1996) at den behandler data upartisk og ikke bekymrer seg videre omkring kontekst og mening.

Historisk er det som vi tidligere har sett, lett å knytte algebraens utvikling til likningsløsning, kort sagt til det vi tenker og ”gjør”. En slik tenkning om fenomenet vil gjerne ha fokus på nytte og operasjonelle aspekter som til eksempel ulike løsningsprosedyrer. Disse ulike løsningsmetodene ble oppfunnet av noen av ”historiens kloke hoder”, er ikke umiddelbart lett tilgjengelig for alle og enhver og må derfor kanskje oppdages av elevene gjennom eksempler. Tidligere har da også skolen konsentrert det meste av algebraopplæringen omkring det å lære regler for bokstavregning og de etablerte prosedyrer og algoritmer i likningsløsning (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000), men som lærebokinnblikket tidligere i dette kapitelet viste, er løsningsmetoder og likningsløsning ikke lenger så sterk knyttet til algebratemaet i skolens lærebøker.

Algebraens operasjonelle aspekter som likningsløsning og algoritmer er fremdeles pensum i grunnskolen, men algebra er mer enn beregninger, og for eksempel likninger betraktes av lærebokforfatterne kanskje mer som ett område der en bruker algebra som verktøy enn som algebraens kjerne i seg selv.

Algebra forstått som symbolbruk, representasjonssystem og kalkulus er som innledningsvis forklart, Wheelers utgangspunkt i tilnærmingen til fenomenet og ingen komplett liste over algebraens kjennetegn. I andre matematikkdidaktikeres arbeider er andre aspekter viet oppmerksomhet og jeg vil nå se nærmere på noen av disse aspektene.

Algebra handler om generalisering

Generalisering er matematikkens hjerteslag og uten at elever jobber med generaliseringer av observasjoner, tenker de ikke matematiske tanker, forklarer Mason (1996), i sin artikkel om algebraens røtter. I sin forskning finner han disse 4 røttene til algebra;

- uttrykke generalitet
- muligheter og begrensninger (som støtte for variabelforståelsen)
- omordne og manipulere (se hvorfor tilsynelatende ulike uttrykk for det samme gir lik løsning)
- generalisert aritmetikk (nytte bokstaver i stede for tall for å uttrykke aritmetiske regler)

Som leseren selv kan se, knytter Mason to av sine fire av algebrarøtter, direkte til generalitetsbegrepet, som han mener har vært oversett i tradisjonell algebra- og matematikk-undervisning. Generalitetsaspektet er ifølge ham så elementært og sentralt i matematikkfaget og algebraen, at mange profesjonelle knapt legger merke til dets tilstedeværelse og dermed mislykkes i å kultivere matematisk og algebraisk tankegang hos sine elever.

I den historiske algebragjennomgangen finner en slike generelle betraktninger omkring matematiske mønstre og sammenhenger i de tidligste epokene. Generalitetsaspektet var med andre ord nærværende lenge før dagens symbolverktøy eksisterte noe som viser at algebraisk tankegang kan eksistere uavhengig av formell algebraisk notasjon. Kjennetegnet på algebraisk tankegang er ifølge forskeren Kieran (1992) at den er relasjonell og strukturell, og hensikten med det algebraiske symbolspråket ”er å oppdage, identifisere og kommunisere generalitet og struktur” (Stephens, 2004, min oversettelse).

I matematikkdidaktisk forskning har utforskning og generalitetsaspektet fått mer fokus i de senere år og algebradefinisjoner av typen ”algebra er en utvidelse eller forlengelse av aritmetikken” (Rojano, 1996) eller ”algebra er fullstendiggjøringen av aritmetikken” (Wheeler, 1996) opplever jeg at det fokuseres på nettopp algebraens generalitetsaspekt.

I algebraundervisningen er det ifølge flere matematikkdidaktikere og også nasjonalt læremiddelsenter (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000) vesentlig å løfte blikket fra det spesifikke til det allmenngyldige, blant annet fordi noe av det sentrale ved det algebraiske symbolspråket er at det muliggjør generalisert aritmetikk, samt generelle matematiske utsagn og bevis. Veiledningen forklarer at oppmerksomhet mot mønstre og gjentagelser i aritmetikken og matematikken generelt, og algebraen spesielt, vil kunne gi en bedre algebraforståelse. En nøkkel til gode algebrakunnskaper som nevnes spesielt og som ofte kan by på problemer for elevene, er det å forstå og kunne nytte bokstavsymboler som generaliserte tall, ikke bare som ukjente eller varierende verdier.

Algebra er en kultur

Ifølge matematikkdidaktikeren Lee (1996) kan det være nyttig å betrakte algebra som en minikultur i den videre matematikkulturen. I antropologien er det vanlig å knytte kulturbegrepet til koder for samfunnsdeltagelse, det vil si en helhet av språk, kunnskaper, trosoppfatninger, skrevne og uskrevne regler – alt det en trenger for å fungere sosialt akseptabelt i en gruppe. En kultur er i stadig forandring og utvikling, og kan på ingen måte betraktes som et statisk fenomen.

Algebra forstått som kultur vektlegger at fenomenet ikke er statisk, samt at det på sett og vis har eget språk, egne aktiviteter, egne regler – og disse aspektene er relatert til hverandre og andre deler av matematikken i en meningsfull helhet. At begrepet brukes for å beskrive både et tankeverktøy, symbolspråket, visse typer matematiske problemer og visse typer tilnærminger til slike matematiske fenomener eller problemer, henger sammen med at språk, tenkning omkring og tilnærming til ett problem, er faktorer som utfyller og påvirker hverandre og som ikke nødvendigvis lar seg skille.

Algebraen som kultur har utviklet seg over lang tid og synet på hva som er dens vesentligste kjennetegn eller aspekt er ofte ubevisst, samt stadig i utvikling. Et vesentlig kjennetegn ved den algebraiske kulturen for Lee (1996), er dens unike universellhet som gjør den nærmest uavhengig av nasjonalspråket.

Om skolens algebraopplæring forklarer Lee;

> ”The term ”cultural shock” can then be useful in thinking about student`s entry into the algebraic culture.”
>
> (Lee, 1996).

Elevenes møte med eller inngang i den algebraiske kulturen sammenlikner hun altså med turisters kultursjokk i møte med dagliglivet i eksotiske land. Skolens algebraundervisning blir, med ett slikt kulturperspektiv på algebra, en lang sosialiseringsprosess, der målet er elever som medlemmer og deltagere i den algebraiske kulturen.

Som i språkinnlæring i andre kulturer, vil læring av det algebraiske språket, de algebraiske prosessene og objektene, det vil si den algebraiske kulturen, være en prosess der læring både skjer gjennom prøving og feiling, ved ubevisst og bevisst herming og bruk, utforsking og oppdagelse – og hvor korrekt forståelse gror gradvis fram.

Avsluttende betraktninger om algebra?

Som en kan lese av denne fremstillingen er det flere ulike innfallsvinkler til fenomenet og begrepet algebra. Som de fleste andre vil også jeg knytte algebrabegrepet sterkere til noen av de diskuterte aspektene enn andre, både bevist og ubevist, og for alle lærere vil jeg hevde at deres syn på algebra vil prege undervisningen og forme hvilke kunnskaper, forståelse og holdninger deres elever utvikler.

I skolen har det som registrert i lærebøker av nyere dato og som påpekt behovet for i nasjonalt læremiddelssenter sin algebraveiledning (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000), kommet ett større fokus på ulike misoppfatninger i algebra og hvordan korrigere disse i undervisningen. Jeg har oppfattet det slik av blant annet den omtalte algebraveiledningen, at tidligere var regneregler for bokstavuttrykk og likningsløsning de vesentlige bestanddelene av skolens algebraundervisning. Algebraundervisningen ble konsentrert omkring bruk av algebraisk notasjon og algebraisk tenkning i noe videre forstand var fraværende. Det nyeste matematikklæreverket jeg har sett på tidligere i dette kapitelet, ser i større grad ut til å fokusere på algebraisk tenkning uten bruk av symboler, etterfulgt av pensumstoff omkring de algebraiske symbolenes rolle og betydning, selvfølgelig i tillegg til ulike regneregler for bokstavuttrykk. Temaet likninger er ikke plassert i lærebokas algebrakapitel.

Å bestemme en korrekt algebradefinisjon skal jeg ikke begi meg inn på, men et utsagn om algebra jeg syntes fanget mye av det jeg tenker om fenomenet algebra er denne;

> ”Algebra is an extension and a generalization of arithmetic. It provides tools for solving problems that that arithmetic does not provide. Algebra did not develop historically as an axiomatic structure. Algebraic structure was investigated late, and as useful as it is in mathematics, it is to sophisticated an approach for beginning students.”
>
> (Leitzel, 1989)

I denne sammenheng vil jeg vektlegg at det ikke eksisterer noe klart skille mellom matematisk og algebraisk tankegang, og at begge deler dreier seg omkring tankeprosesser som endres, formes og utvikles. Vesentlig for meg er at den algebraiske notasjonen lar oss forholde oss til ukjente, ubestemte, varierende og generaliserte tall, slik at vi kan løse matematiske problemer, uttrykke generelle sammenhenger og bevise matematiske sammenhenger. Slik ser jeg at jeg på mange måter er opptatt av at det algebraiske symbolspråket er ett intellektuelt verktøy som vi lærer for å bruke til noe, og ikke dreier seg om trylling eller mystisk magi. Jeg vil si som matematikkdidaktikeren Thorpe (1989) at det er viktig at undervisningen tar sikte på at elevene skal oppleve algebra som ”an aid for thinking”, og ikke som ”a bag of tricks”.

Jeg har sett andre sammenlikne algebraens plass i grunnskolematematikken med matematikkens plass blant andre skolefag, og kan med mitt eget første møte med algebraisk notasjon i minne, godt forstå hvorfor mange betrakter fenomenet som avansert og vanskelig. Tankene om at møte med algebraen for mange elever oppleves som ett kultursjokk opplever jeg som svært beskrivende for slik jeg minnes mitt eget møte med algebraisk notasjon, og slik jeg ser mange av mine elevers møte med denne formelle symbolbruken og de tilhørende regneregler. Utfordringen i skolehverdagen blir å gi en algebrainnføring som minsker sjokket, samt å sette algebraen i en meningsfull sammenheng.

Teori om læring av algebra

Tenkning omkring læring er uløselig knyttet til tenkning omkring hva kunnskap er, hvor kunnskap kommer fra og hva hensikten med kunnskapen er. Teorier og tanker om hvordan en lærer algebra reiser således et spørsmål ”Hvordan lære algebra?”, og dette spørsmålet er uten fasitsvar, men flere har gjort forsøk på å komme med bedre oppskrifter og være nærmere idealet enn hva den tradisjonelle og vanlige skoleopplæringen, hva nå enn den består av, blir beskyldt for å være. Mye forskning har vært gjort, men resultatet er da gjerne i like stor grad kunnskap om hvordan det ikke bør gjøres, som oppskriften på suksessrik undervisning.

For øvrig er det jo slik at tenkning omkring hvordan læring foregår ikke er det samme som oppskriften på hvordan undervise dette. Kort oppsummert kan allikevel si at det i dag råder en form for enighet, om at det til syvende og sist er den enkelte elev som skal lære, og at lærerens rolle er å legge til rette for denne læringen. Helt opplagt er det individuelle ulikheter med hensyn til hvordan noen best lærer og dette gjelder selvfølgelig helt generelt, ikke bare i matematikk og algebraopplæring.

Videre i dette kapitlet vil jeg ta for meg ulike teorier om kunnskap, undervisning og læring generelt, for så å se på teorier om kunnskap, undervisning og læring i matematikk og algebra spesielt.

Å øse fra kunnskapens kilde

Det kan skilles mellom to ytterpunkter med hensyn til forståelse om hvor vi mennesker får våre kunnskaper fra, uavhengig om det er snakk om matematikk, algebra eller kunnskap generelt. De to perspektivene kan føres tilbake til to av antikkens filosofer, Aristoteles og Platon. Sjøberg (Sjøberg, 2004) omtaler de to tilnærmingene henholdsvis som empirisme og rasjonalisme. Empirismen peker på kunnskap som et resultat av sanseinntrykk, handlinger og erfaring, kunnskaper kommer med andre ord ”utenfra”, mens rasjonalismen peker på tanken og fornuften som kilde til kunnskap, her kommer med andre ord kunnskapen ”innenfra”. Ifølge Sjøberg (2004) har læringssyn historisk sett ofte pendlet mellom disse to ytterpunktene, som jo selvfølgelig beskriver hver sin del av kunnskapens utgangspunkt, siden erfaringen former det vi tenker og forstår, samtidig som det vi tenker og forstår former de erfaringene vi gjør oss.

Skolehistorien har også vært preget av pendelsvingning med hensyn til idealer om klassisk dannelse kontra nytteperspektiver som grunnlaget for læringen. I latinskolens tider tenkte man at læring av formell matematikk, til forskjell fra praktisk regning, kunne utvikle og danne elevene mentalt, og gi eleven gode egenskaper utover de faktiske matematiske ferdighetene (Niss, 2001). Dette læringsperspektivet tenkte undervisning som formidling eller meddeling av innsikt og kunnskap innen ett emne. Undervisning ble på mange måter betraktet som kunnskapsoverføring der eleven var en forholdsvis passiv mottager, av det vi kunne kalle "puggestoff". Som reaksjon på slik læring, som filosofen John Dewey (1859 – 1952) mente var overføring av "døde faktakunnskaper", lanserte han sin pragmatiske teori om "learning by doing" der målet var "utdanning for demokrati" (Sjøberg, 2004). Deweys aktivitetspedagogikk har hatt stor innflytelse over senere pedagogisk forskning, læreplaner og skole.

I tilnærming til et hvilket som helst fagstoff, også algebra, finnes det to didaktiske ytterpunkter, det vi kan kalle induktiv tilnærming og det vi kan kalle deduktiv tilnærming. I algebraundervisning vil de ulike tilnærmingene gi helt ulike undervisningsopplegg.

Den første metoden, induktiv tilnærming i matematikkfaget, er et resultat av at pedagoger generelt og matematikkdidaktikere spesielt, registrerte at i matematikkfaget er det slik at;

> "Students often are faced with the results and the solutions arrived at historically without having been given time to struggle with the motivation and the issues behind the problemes."
>
> (Arcavi, 1995)

Matematiske verktøy som algebra, som i utgangspunktet ble oppfunnet for lettere å kunne forholde seg til og arbeide med ulike matematiske situasjoner, oppleves da gjerne som forvanskende, irrelevant og meningsløst (Arcavi, 1995). En mer induktiv algebraundervisning vil vektlegge at elever bør oppdage matematiske sammenhenger gjerne gjennom arbeid med eksempler på slike sammenhenger. Læringsprosessen tenkes ofte som en guidet oppdagelsesprosess, der læreren forhåpentligvis leder elevene fra oppdagelse til oppdagelse, det vil si læring. Induktiv metode kan for eksempel medføre forsøk på å gi elevene det vi kan kalle prealgebraisk erfaring.

Den andre undervisningstilnærmingen, en mer deduktiv metode, har den logiske oppbygningen, begrunnelsen for løsningsprosedyrer – kort sagt helhetsforståelsen, som jo er målet å formidle videre, som utgangspunkt. Undervisningen vil da gjerne konsentrere seg om å definere og forklare begreper og sammenhenger, samt å videreformidle nyttige løsningsprosedyrer, regler for regningsarbeidet og forklaringer på hvorfor disse algoritmene og reglene funger. Tilhengere av mer deduktiv tilnærming til fagstoff vil kunne påpeke at mye læring skjer gjennom herming, samt at mer deduktive undervisningsmetoder vil være mer tidseffektive enn å la hver enkelt elev finne, om de evner, matematiske algoritmer på ny. I dag er det relativ bred enighet om at en ren deduktiv tilnærming til algebra i begynneropplæringen, er for avansert. Læreplaner, læreverk og undervisningspraksis befinner seg i praksis ett sted mellom disse to didaktiske ytterpunktene.

Et fjerde skille som ofte gjøres med hensyn til læring og skole, kan knyttes til begrepene oppdage eller oppfinne (Solvang, 1991). Læring forstått som å oppdage kan vi knytte til begrepet Behaviorisme og læring forstått som å finne opp til Konstruktivismebegrepet (Imsen, 1999). Jeg vil nå redegjøre for konstruktivisme som læringsperspektiv, da dette på mange måter er det teoretiske fundamentet for Diagnostiske oppgaver og dermed Kim-prosjektet. Den historiske behandlingen av konstruktivismen i dette avsnitt følger støtter seg på Imsens presentasjon av tema i sine bøker ”Elevens verden” (1999), ”Lærerens verden” (1999), Solvangs (1991) behandling av tema i ”Matematikkdidaktikk” og Sjøbergs(2004) gjennomgang av tema i ”Naturfag som allmenndannelse”.

Konstruktivisme – læring ved å oppfinne

I de første årene etter 2.verdenskrig var det behavioristiske læringsteorier, med fokus på det empirisk etterprøvbare, som dominerte i pedagogiske miljøer. Utover 50- og 60- tallet svingte pendelen med hensyn til læringsteori, fra empirifokus til mer kognitive eller rasjonalistisk fokuserte læringsteorier, det var de mentale prosessene som var nøkkel i utvikling, mente mange teoretikere, ikke de ytre tegnene. Imsen forklarer tenkningen slik:

> ”Det er de indre prosessene som skjer fra sansingen finner sted til vi får ut en eller annen reaksjon, som er interessante”
>
> ”Mennesket er et aktivt vesen som tolker og vurderer den ytre stimuli på et selvstendig grunnlag før det handler.”
>
> (Imsen, 1999).

Det konstruktivistiske synet på læring er det elementet i en mer kognitiv tradisjon som har fått størst innflytelse på synet på læring (Säljö, 2000). Begrepet konstruktivisme beskriver både et læringssyn og ett kunnskapssyn. I denne fremstillingen er det konstruktivisme som læringssyn jeg skal se nærmere på.

Konstruktivisme i læringsteoretisk sammenheng knyttes gjerne til den sveitsiske biologen Jean Piaget (1896-1980), som tidlig ble interessert i psykoanalyse og menneskers mentale utvikling. . I løpet av sitt lange forfatterskap videreutviklet og modifiserte Piaget sine teorier, slik at en fullstendig oversikt over og definisjon av begreper og ideer, er det vanskelig å gi. Generelt forklarte Piaget at læring var et resultat av hva individet gjorde med stimuleringen, og ikke et resultat av hva stimulering gjorde med individet (Imsen, 1999). Læringsprosessen var slik sett hovedsakelig individuell, og kunnskapen av subjektiv karakter. Hvert individ konstruerte sin subjektive forståelse av ”noe” på bakgrunn av tidligere individuell forståelse og nye inntrykk eller erfaringer.

Teoriens fundament var systematiske studier av barn og deres utvikling, en utvikling som Piaget beskrev i ulike stadier eller trinn (Sjøberg, 2004). Vesentlig i denne sammenheng er ikke Piagets omdiskuterte stadieteori, men hans teori kalt kognitiv konstruktivisme. Teorien kan betraktes som en forklaring på hvordan erkjennelse eller kunnskap fødes, eller sagt på en annen måte, teorien innebærer et begrepsapparat til å forklare hvordan individer når ny erkjennelse.

Sentralt i Piagets teori var begrepene skjema, adaptasjon, assimilasjon og akkomodasjon (Sjøberg, 2004). Skjemabegrepet pekte på at det kognitive, mentale eller intellektuelle ved ett menneske var organisert eller strukturert som delstrukturer, ulike tankemessige operasjoner, eller skjema, som hang sammen. Den totale skjemastrukturen eller kunnskapen individet innehadde, var på mange vis personens verktøy til å begripe verden. ”Skjemaene” eller forståelsen ble endret gjennom en vekselvirkning med omgivelsene, en adaptasjonsprosess med to sider; assimilasjon og akkomodasjon. Når ny informasjon eller nye inntrykk, en utfordring, kunne passes direkte inn i bestående skjemaer eller kunnskapsstrukturer, kalte Piaget dette ”assimilasjon”. Virkeligheten kunne tilpasses individets forforståelse. Solvang forklarer;

> ”Å forstå noe er å kunne assimilere det inn i eksisterende skjema.”
>
> (Solvang, 1991)

Når ny informasjon eller nye inntrykk, en utfordring, ikke uten videre kunne passes inn med de eksisterende strukturene, oppstod ett behov for strukturendring, ”akkomodasjon”, og det var denne endringen som egentlig innebar læring (Solvang, 1991). I slike situasjoner ville individet oppleve at dens skjema var brakt i ubalanse, og føle et behov, det vil si motivasjon, for igjen å oppnå likevekt, ved å tilpasse sine ”skjema” til ny erfaring. Sentralt i teorien ble dermed en antagelse om at individer søker en form for harmonisk helhet, med hensyn til kunnskaper og kunnskapsstruktur.

Det er verdt å merke seg at når Piaget beskrev hvordan individet fikk ny forståelse og erkjennelse, så beskrev han hvordan individet harmoniserte ny og gammel erfaring og kunnskap. Dette uten at individets nye erkjennelse sett fra et undervisningsperspektiv nødvendigvis innebar kunnskap i form av ønsket eller korrekt faglig forståelse av disse erfaringene og utfordringene. Konstruktivismen er dermed blitt kritisert fordi all kunnskap eller erkjennelse kan fortone seg som like god, mens målet med for eksempel matematikkundervisning, jo er at eleven skal nå samme type erkjennelse som tidligere matematikere har nådd. På den andre siden kan man trygt hevde at Piagets teori og begreper har ”slått an” for eksempel i matematikkdidaktiske kretser, da hans beskrivelse av læringsprosessen har passet godt med mange fagpersoners meninger og erfaringer med hensyn til egen og andres læring. Piagets konstruktivisme har også møtt en del kritikk med hensyn til sin individorientering, noe som leder oss til konstruktivismens andre store teoretiker, den russiske psykologen og akademikeren Lev Vygotsky (1896 -1934).

Vygotsky søkte å etablere en ”ny” psykologi med et marxistisk filosofisk fundament, og han fokuserte på de kollektive prosessene i læringssituasjonen. I sin teori, av andre kategorisert som et sosiokulturelt perspektiv eller som et sosialkonstruktivistisk perspektiv (Sjøberg, 2004), vektla han at læring var ett sosialt fenomen og slett ikke en så individuell prosess som blant annet Piagets teori ga inntrykk av. Fokuset på fellesskap kom til syne i ulike deler av Vygoskys tanker om læring. Sentralt i læringssituasjonen var språket; både som kommunikasjonsredskap og som individets redskap, det vil si byggesteiner, til å bearbeide, tenke omkring eller forstå virkeligheten (Imsen, 1999). Språket, som var en kollektiv konstruksjon, hadde dermed en kunnskapsformende funksjon påpekte Vygotsky. Mental utvikling hadde med andre ord sosial aktivitet som utgangspunkt, slik samfunnsutvikling hadde materiell utvikling som utgangspunkt.

Et annet viktig poeng hos Vygotsky gjorde bruk av begrepet ”den proksimale utviklingssonen”. Teorien var at hvert individ hadde en mestringssone, eller ett nivå av mestring med hensyn til noe, og en noe større utviklingssone, nivåer av mestring, som var mulig å ”innta” ved ett gitt tidspunkt. Sentralt her var at individet i felleskap med andre hadde en større mulig utviklingssone, et større utviklingspotensiale, kunne lære mer, enn individet alene hadde mulighet til. Læringen tenkte Vygotsky seg, som Piaget, at måtte skje med oppgaver som vi kan kalle utfordringer, i motsetning til det vi kan kalle rutineoppgaver, og disse utfordringene måtte ligge på grensen til eller litt utenfor det, elevene alt mestret. Utfordringen i undervisningssammenheng ville dermed være, å være en kompetent veileder eller samtalepartner, som ga elevene utfordringer som lå litt utenfor den enkeltes mestringsnivå, men innenfor utviklingssonen, slik at elever opplevde at ”lyset gikk opp” og de kom til ny forståelse av noe.

Konstruktivistisk og sosialkonstruktivistisk teori betrakter ifølge den svenske professoren Roger Säljö, eleven som den aktive part, som subjektet i læringsprosessen, mens læreren får en rolle som i større grad bærer preg av å være trener, tilrettelegger eller samtalepartner (Hovik, 2007). Læring styrt av elevens egen nysgjerrighet, på grunnlag av indre motivasjon og med en undersøkende metode holdes gjerne frem som ideal for læringsprosessen, noe som harmonerer med forholdsvis åpne læreplaner i de ulike fagene, kombinert med en lærerrolle som i større grad bærer preg av veiledning (Bjørnstad, 2002). Utfordringen i skolehverdagen ligger da i å balansere individets ønsker og preferanser, mot samfunnets behov eller vedtatte læreplaner.

Selve matematikkfaget eller fagstoffet kan i det ”konstruktivistiske klasserom” fremstå med et mindre objektivt ”vesen”, enn det gjerne gjør ved undervisningspraksis som ligger nærere opp til en behavioristisk læringsforståelse (Bjørnstad, 2002). Matematikklæring med ett konstruktivistisk utgangspunkt vil gjerne i større grad ha problemene eller utfordringene, det vil si helheten, som utgangspunkt, mer en gjennomgang av fagstoff og eksempler, etterfulgt av at elever gjør små deloppgaver liknende til det gjennomgåtte fagstoffet. En vil gjerne rangere kunnskapen i ulike nivåer, der det å utføre beregningene eller ramse opp faktakunnskap, i matematikken ofte kalt operasjonell eller instrumentell kunnskap, ikke er betraktet som målet for undervisningen. Målet er gjerne en dypere forståelse av emnet eller fagstoffet, i matematikken gjerne kalt figurativ eller relasjonell kunnskap, og slik innsikt i faget innebærer i konstruktivistisk tankegang ett intellektuelt sprang i erkjennelse (akkomodasjon) og kan ikke bare forstås som summen av kunnskap knyttet til mange små deloppgaver av stigende vanskelighetsgrad (Solvang, 1991).

Andre aspekter som er vesentlige i algebralæring sett med sosialkonstruktivistiske øyne, er bruk av konkrete situasjoner eller problemer, gruppearbeid og vekt på samtale, begrepslæring og språk generelt i matematikkfaget. Faget vil kunne bære preg av en større grad av muntlighet, viktigheten av "å snakke matematikk", enn ved undervisningspraksis som ligger nærere en mer behavioristisk forståelse av læringsprosessen.

> "Piagets teori om akkomodasjon og assimilasjon og Vygotskys teori om barnets proksimale sone har begge påvirket undervisningsmetoder slik at fokuset rettes mot å ta utgangspunkt i det barnet kan / kan greie."
>
> (Hovik, 2006).

Å jobbe med passe vanskelig fagstoff, på grensen til det barnet allerede mestrer eller forstår, er også vesentlig for ett maksimalt læringsutbytte.

Forsøk med aldersblandede eller mindre homogene grupper i undervisningssammenheng, bygger også på tankegang om at elever i felleskap med andre, gjerne med mer utviklede kunnskaper, har ett større læringspotensial enn individet i en homogen gruppe har.

Piagets konstruktivisme har som nevnt blitt kritisert for sitt individfokus. Til undervisningspraksis med basis i mer konstruktivistisk teori vil tilhengere av mer tradisjonell klasseromsundervisning, gjerne påpeke hvor tidkrevende de ulike undervisningsmetodene kan være, at en mer tilbaketrukket lærerrolle kan forsterke sosiale forskjeller mer enn utjevne disse og sist men ikke minst;

> "At barns egne aktiviteter uten videre skal lede fram til å oppdage for eksempel abstrakte vitenskaplige kunnskaper er påpekt som urimelig av mange"
>
> (Hovik, 2007)

Både ulike konstruktivistiske og behavioristiske ideer har som nevnt fått innflytelse på det praktiske virket i klasserom i det ganske land. Begge disse teoriene er generelle teorier om hvordan læring skjer og ikke undervisningsoppskrifter.

Metalæring i matematikk

I de siste 30 år har matematikkdidaktikken også hatt noe fokus på begrepet metabevissthet og metalæring. Jeg vil illustrere med følgende anekdote funnet og lest på Mensa Norge sine diskusjonssider:

> ”En gang var det en matematikkprofessor som skulle hjelpe sin lille pode i småskolealder med matematikkleksene. Gutten var ”fæl” til å slurve med fargestiftene, han kom for eksempel utenfor linjene i prikkebildene, og fikk ofte ”skjenn” for dette på skolen. Underveis kom far og sønn i snakk om at faren jobbet med ”matematikkoppgaver” i sitt yrkesliv, hvorpå poden utbrøt: Men pappa, blir du ikke veldig lei av all fargeleggingen?”

Metabevissthet har med refleksjon omkring egen læring å gjøre, men begrepet metalæring knyttes i Norge gjerne til matematikkdidaktiker Stieg Mellin-Olsen, som med begrepet fokuserte på alt det elevene lærer i matematikkfaget utenom det faglige (Befring, 1997). Elever kan til eksempel sitte igjen med inntrykk av at et emne er nyttig eller unyttig, kjedelig eller spennende, vanskelig eller lett eller at de elever og lærere som liker faget er kjedelige og rigide, eventuelt morsomme og hyggelige. Inntrykk som i på en måte er adskilt fra det faglige, men som for elevene kan forme deres totalopplevelse av faget. Opplevelsen er på den ene siden et resultat av erfaringen, men på den andre side former denne totalopplevelsen den videre opplevelsen av faget. Metalæringen kan med andre ord både være en motivasjonsfaktor eller inspirasjonsfaktor, men den kan også være et hinder for videre læring i faget.

Flere studier, deriblant Læringssenterets prosjektstudie av ”Tanker om matematikk hos elever og lærere” (Streitlien, Wiik, Brekke, 20001) viser sammenheng mellom et positivt syn på eller positiv opplevelse av faget, og bedre faglige resultater i faget. Metalæring som perspektiv på læring kan man selvfølgelig dra nytte av mer generelt i skolen, enn kun tilknyttet matematikkfaget.

Ulike tilnærmingsperspektiver og læring.

I matematikkdidaktisk forsking har det i de siste 25 år kommet et stadig større fokus på hva som kan sies å være algebraens vesentligste aspekt, hva som kjennetegner algebraisk tankegang, og hvordan tilnærmingen til algebra bør skje i skolen. Ulike forskere har påpekt ulike fundamenter for eller kjennetegn på algebraisk tenkning og utledet teorier om viktig og riktig tilnærming for å utvikle mer fruktbar algebraisk tankegang hos elever. I matematikkdidaktiske forskningsmiljøer skilles det ofte mellom fire ulike perspektiver på tilnærmingen til algebra; generaliseringsperspektivet, problemløsningsperspektivet, modelleringsperspektivet og funksjonsperspektivet. Valg av tilnærmingsperspektiv for undervisningen, vil kunne få konsekvenser;

> ”These curricular options determine to a large extent the algebraic conceptions students develop, as has been shown in studies on the meanings that students ascribe to algebraic symbols and notations, the poor strategic decisions they make, and, in a more general way, the relationship they continue to maintain with algebra several years after having been introduced to it.”
>
> (Bednarz, Kieran, Lee, 1996).

Ulike tilnærmingsperspektiv vil altså kunne gi ulike forståelser av algebraiske ideer og begreper, ulike måter å tenke på som fundament i den algebraiske abstraksjonen eller ulike algebraiske konsepter å møte oppgaver eller problemer eller ”virkeligheten” med. Elever vil kunne erverve ulik oppfatning om hva bokstavsymboler representerer, ulik opplevelse av hva som er algebraens egenart og ulik oppfatning av formålet med algebraundervisningen. Jeg vil nå se litt nærmere på de 4 omtalte tilnærmingsperspektivene.

Generaliseringsperspektivet.

Som vi alt har sett har det i de siste tiårs matematikkdidaktisk forskning, vært gjennomført flere forskningsprosjekter, og skrevet diverse artikler knyttet til temaet; begynneropplæringen i algebra. Flere av disse artiklene og forsøkene, blant annet Mason (1996), har hatt fokus på algebrainnlæring med generalitetsaspekter som tilnærmingsperspektiv. Matematikkdidaktisk forskning søkte forklaringer på elevers manglende kunnskaper i algebra, og flere forskere, blant annet Stephens (2004), anklaget skolens matematikk og algebraundervisning for å ha ett statisk og feil fokus, i tillegg til at skolen ofte reduserte algebraen til prosedyrer, regler for å transformere og løse likninger (Bednarz, Kieran, Lee, 1996).

Oppfordringen til matematikklærerne er, som jeg tidligere har kommet inn på, å flytte fokus fra det spesifikke og til det generelle i undervisningen, allerede i grunnleggende aritmetikkopplæring, da det som virkelig kjennetegner algebraisk tankegang er generalitet. En større vekt på dette ville ifølge Mason (1996) levendegjøre algebraen for elevene, samt oppleves som meningsfylt og kanskje også lekent og morsomt.

Læring med generalitetsaspekt som grunnlag vektlegger å la elevene utforske matematiske sammenhenger og endringer i disse, på jakt etter fruktbare mønster og regularitet. Vesentlig her er målet om at elevene etter hvert skal kunne gjøre gode og korrekte oppsummeringer av matematiske sammenhenger, løsninger og relasjoner. Når elever møter matematikken gjennom spesifikke eksempler, som for læreren er nettopp det (eksempler), utgjør dette for elevene ofte det totale bilde. En mer generalitetsfokusert undervisning vil for eksempel når elever lærer om trekanters vinkelsum, flytte fokus fra at summen er 180°, som ifølge Mason (1996) tradisjonelt har vært vektlagt i skolen, til det vesentlige, nemlig at summen er likt for alle trekanter. Tanken er selvsagt at læringsmetoder med å utvikle generalitetsaspektet mer synlig i undervisningen skal hjelpe elevene å utvikle algebraisk tankegang i den betydningen at de kan løfte blikket fra det konkrete spesielle eksemplet til den allmenngyldige algebraiske sammenhengen.

I artikkelen ”Algebra With Numbers and Aritmetic With Letters: A definition of Pre-Algebra” (Linchevski, 1995) tar den israelske matematikkdidaktikeren Liora Linchevski for seg det hun kaller pre - algebraiske konsepter, måter å tenke og snakke algebraisk,(generelt), på i ett aritmetisk miljø. Linchevski forklarer at de prealgebraiske konseptene er vesentlig for å fylle gapet mellom aritmetisk perspektiv og algebraiske perspektiv i matematikken og at for å bygge disse pre - algebraiske konseptene er det vesentlig med pre - algebraiske aktiviteter. Som pre - algebraiske aktiviteter utpeker hun det å jobbe med mønster - generalisering samt å utlede regler på grunnlag av flere eksempler og å bryte en operasjon ned i småbiter eller små steg, for å identifisere strukturen i operasjonen. Utforsking som kilde til læring og viktigheten av å bygge gode pre - algebraiske konsepter kan ikke undervurderes forklarer Linchevski, da disse prekonseptene ikke skal forsvinne eller byttes ut, men siden blir støttefunksjoner for de formelle algebraiske konseptene (Linchevski, 1995).

Tilhengere av generalitetsaspekt i algebraundervisningen vektlegger gjerne forståelse av bokstavsymboler som generaliserte tall og likhetstegn som ekvivalenstegn (Hovik, 2006). De vil også kunne påpeke viktigheten av å samtale om ulike løsningsstrategier på en måte som belyser fundamentale matematiske prosesser og ideer” (Stephens, 2004). For øvrig er det vanlig at en tenker på algebra som ett språk for å representere sammenhengen mellom variabler eller sagt mer generelt, algebra som fullføringen av aritmetikken (Wheeler, 1996).

Problemløsningsperspektivet.

Problemløsning som perspektiv i matematikkopplæringen er gjerne knyttet til matematikeren Polaya (1887 – 1985), og vektlegger ever til å tilnærme seg problemer gjennom logisk tenkning og situasjonsanalysere. Til grunn for tankegangen ligger en tanke om at matematisk så vel som algebraisk tankegang, i bunn og grunn handler om å gripe og løse utfordringer. Dette innebærer dermed en tenkning der matematikken, og algebraen, på mange måter betraktes som ett problemløsningsverktøy og målet er samfunnsborgere med gode problemløsningsevner.

Problemløsningsprosessen kjennetegnes ifølge Polaya av ulike faser; å forstå problemet, å legge en plan, å gjennomføre en plan, å se tilbake (Solvang, 1991). I problemløsningsprosessens første og siste fase vil generaliseringsaspekter kunne spille en rolle.

Det historiske utgangspunktet for algebraens utvikling var, som en kan se av det historiske tilbakeblikket, enkeltmenneskers refleksjon omkring problemer de opplevde ett ønske om å løse.

> ”In the beginning were the problems”
>
> (Rojano, 1996)

Ønske om å forstå ble den viktige motivasjonsfaktoren som gjorde at de ikke oppga forsøk på å løse problemet i ”første motbakke”. Problemløsningsperspektivet tilhengere anklager gjerne skolen for å undervise slik at elevene ikke opplever problemer de ønsker å løse, men i stede for raskt møter;

> “The finished version of instrumental algebra, with all its potential as a synthetic and formal language”
>
> (Rojano, 1996)

Ett møte som kan virke fremmedgjørende og demotiverende, og som gjerne kun skaper en instrumentell forståelse av løsningsmetodene.

Flere andre matematikkdidaktikere har i sin forskning jobbet med problemløsning som metode for algebrainnlæring. Disse forskerne peker på viktigheten av at problemer er egnede, og påpeker at mange av de oppgaver elver pålegges å løse ved bruk av algebra, lett kan løses aritmetisk og uten de algebraiske ”våpen” (Wheeler, 1996). Algebraen blir gjerne da betraktet som et ekstra problem eller en unyttig metode, og ikke som ett verktøy som letter problemløsningen. Som motivasjonsfaktor fremholder disse teoretikerne viktigheten av å gjøre bruk av problemoppgaver av en slik vanskelighetsgrad, at tradisjonell aritmetisk løsning ville være vanskelig. Som eksempel på en slik oppgave vil jeg trekke fram matematikkdidaktikerne Bednarz og Janviers sportsoppgave:

> ”380 elever er registrert i tre sportsaktiviteter gjennom sesongen. Basketball har 3 ganger så mange elever som skøyter, og svømming har 114 flere elever enn basketball. Hvor mange elever er registrert i hver av aktivitetene?”

(Bjørnstad, 2002)

Som motivasjonsfaktor kan oppgaven være velegnet fordi den er komplisert å løse aritmetisk siden den inneholder både addisjon og multiplikasjon, mens den samtidig ikke er spesielt vanskelig å løse algebraisk. Oppgaven tar dessuten fatt i saker som kan ha med elevers hverdag å gjøre, ett reelt problem som bruk av algebra kan løse. Sportsoppgaven kan slik sett også oppfattes som ett forsøk på å knytte algebraen til det virkelige liv, slik læreplanen og ett modelleringsperspektiv på algebraen vektlegger.

Modelleringsperspektivet.

Modelleringsperspektiv på begynneropplæringen i algebra knytter seg til en tenkning om at matematikk i bunn og grunn handler om å forklare og beskrive den kompliserte og av og til uforståelige virkeligheten. For å gjøre dette benyttes modeller, som lar oss forholde oss til den uforståelige og ukjente situasjonen, men som samtidig alltid også innebærer en forenkling av denne virkeligheten (Sjøberg, 2004). At algebraen og matematikken modellerer virkeligheten er ifølge modelleringsperspektivet vesentlig å formidle til elevene, slik at de unngår unødvendige misoppfatninger og kjenner den matematiske modellens begrensninger, for eksempel at konklusjonene kun er gyldige med gitte forutsetninger.

Å knytte matematikken og algebraen til det virkelige liv og praktiske situasjoner er dermed også i dette perspektivet sentralt, både av hensyn til fagets begrunnelse, som kognitiv støtte i læring og forståelse av situasjoner, men også relatert til elevers læringsmotivasjon (Blomhøj, 2004). Matematiske modeller er på mange vis grunnlaget for vårt moderne teknologiske samfunn, slik at kompetanse relatert til matematiske modeller er etterspurt kompetanse, både av spesialister og legfolk, i arbeidslivet generelt og i utvikling av det demokratiske samfunn spesielt (Blomhøj, 2004).

Modelleringsperspektivet på algebraopplæringen henger på mange måter sammen med ett problemorientert opplæringsperspektiv, der utgangspunktet er problemene og algebraen utgjør representasjonen og matematiseringen av situasjonen. Gode algebrakunnskaper blir med ett slikt syn grunnlaget for gode modelleringsevner (Hovik, 2006).

Modelleringssituasjonen kan beskrives med ulike faser eller trinn, men Blomhøj (2004) fastholder at prosessen ikke bør forstås som en lineær prosess, men som en mer syklisk prosess der faser og utvikling er gjensidig avhengig. En fordel ved modeller er at de muliggjør sammenlikning av enkeltsituasjoner med andre, at de på sett og vis kan strukturerer problemet for oss, samt at de kan lede oss til nye ideer og tanker omkring problemet (Sjøberg, 2004).

Funksjonsperspektivet.

I sin artikkel “Critical considerations for the future of algebra” (Leitzel, 1989) tar matematikkdidaktikeren Leitzel til orde for å ha funksjoner som utgangspunkt i algebralæring. En fordel av å ha funksjoner som utgangspunkt i algebraundervisningen vil ifølge forskeren kunne være større fokus på det problematiske algebrabegrepet, slik at elevene ikke kun utvikler forståelsen av at det algebraiske symbolet representerer en ukjent størrelse. Artikkelen anbefaler at introduksjonen av likninger blir utsatt, mens det oppfordres til å gi eleven konkrete erfaringer med funksjoner i og på ulike former.

Funksjonsperspektiv på algebra har som utgangspunkt at algebraundervisningen i skolen har forandret seg forholdsvis lite fra tidlig etterkrigstid til det nittende århundrets sluttfase, mens matematikken, de teknologiske muligheter og samfunnet i samme periode endret seg mye (Thorpe, 1989). Bruken av grafisk fremstilling i informasjonsøyemed er for eksempel mangedoblet (Noss, 2002). Ifølge flere matematikkdidaktikeren er det på tide at algebraundervisningen i skolen reflekterer disse store endringene, ved å endre skolens algebraundervisning.

> ”Let us not just teach about functions in algebra; let us make functions the centrepiece of algebra instruction.”
>
> (Thorpe, 1989)

Funksjonsperspektiv i algebratilnærmingen vektlegger til eksempel; bokstavsymboler forstått som variable størrelser snarere enn ukjente verdier, og likhetstegnet som et tegn på identitet mellom to regneprosesser” (Stephens, 2004).

Med et slikt undervisningsperspektiv bør læreren ha som utgangspunkt og videreformidle at funksjoner er konkrete objekter, som kan representeres på ulike vis (Thorpe, 1989). En funksjonsbasert algebraundervisning vil dermed i større grad kunne fokusere på sammenhengen mellom ulike representasjonsformer av ett og samme objekt eller situasjon, slik at disse sammen og hver for seg utvikles og forsterkes. Funksjonsbaser algebraundervisning vil også kunne nyttegjøre seg av mer visuelle fremstillinger av løsninger og sammenhenger i algebraen. En annen fordel ved et funksjonsbasert perspektiv i undervisningen er ifølge Thorpe (1989) at det vil gi mening til symbolmanipulering og dermed øke motivasjonen for læring.

Algebratilnærming i skolehverdagen.

De fire undervisningsperspektivene på algebra har vært gjenstand for forskning og av artiklenes utgivelsessår kan en se at det har vært en utvikling med hensyn til perspektivenes fokus og hvilke perspektiv som har vært i fokus i det matematikkdidaktiske forskningsmiljøet. Perspektivene vil dermed ha fått innflytelse på skolen, lærere og læreplaner i ulike epoker, noe vi kan se i en gjennomgang av skolens læreplaner.

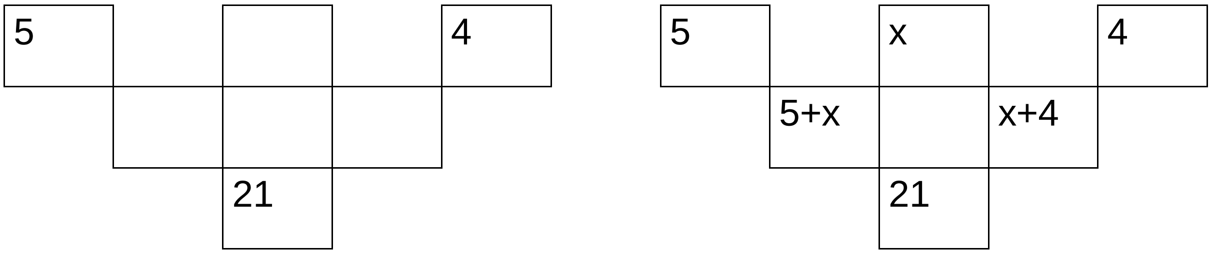
Identifisering av de fire ulike undervisningstilnærmingene til algebra innebærer, påpeker Wheeler, en teoretisk og noe kunstig kategorisering av undervisningen.

> ”The separation into four approaches to ”beginning algebra” is artificial; all four components are needed in any algebra program.”
>
> “The four choices we have before us are not independent alternatives. Although presented as choices for a starting-point, they are really somewhat complementary objectives for the teaching of algebra”
>
> (Wheeler, 1996)

Enkelte forskere har lansert ideer som ligger i krysningen mellom ulike tilnærmingsperspektiver og flere forskere argumenterer for at algebra bør presenteres gjennom likninger.

For å utvikle et strukturelt matematisk perspektiv på algebraen anbefaler Kieran (1990) bruk av både intuitive og uformelle metoder i likningsløsning. Å bare lære formelle metoder for likningsløsning, anbefaler Kieran ikke. Med henvisning til B. Withmans forskning hevder hun at elever som kun lærer formelle metoder for likningsløsning utvikler særlig dårlig algebraforståelse, samt at elever som bruker prøving og feiling med verdier som metode i tidlig algebrainnlæring, utvikler bedre likevektsforståelse (Kieran, 1990). Kieran er ikke den eneste matematikkdidaktikeren som er opptatt av likningen og problemenes rolle i algebrainnlæringen. Matematikkdidaktikerne Herscovics og Linchevski tok i sitt arbeid til orde for at algebraen historisk sprang ut av likninger og hevdet at det i undervisningssammenheng ville være naturlig og presenter algebra gjennom likninger (Bjørnstad, 2002).

I sin artikkel ”Purpose of School Algebra” ser matematikkdidaktiker Bell (1995) på bruk av ulike talldiagrammer og tallveier som metode i likningsløsning, for å skape behovet for innføringen av den ukjente x. Et talldiagram hentet fra Bells artikkel er disse:



(Bell, 1995)

Problemet her er å finne en tallverdi slik at tallet i ruten tilsvarer summen av tallene i de to diagonalt tilstøtende rutene i rekken over. Nok ett problem som er avansert å løse aritmetisk, men som ved hjelp av algebraisk notasjon blir forholdsvis enkelt. Problemstilling og diagram kan selvfølgelig varieres etter hvilke sammenhenger en ønsker å jobbe med. Bell peker også på viktigheten av å jobbe tekstoppgaver både for å motvirke inntrykket av algebra som regelbundet uttrykksmanipulering og også fordi disse gir trening i å tolke problemet, stille opp og løse likninger og drøfte, eller gi mening til, likningsløsningen (Bell, 1995). På en måte er det problemene og likningene som er innfallsport til algebraen her, på en annen måte er det mønstre og sammenhenger, eller generalitetsaspekter som er i fokus.

På tross av at kategoriseringen av de 4 ulike perspektivene verken kan sies å dekke alle tilnærmingsperspektiver eller klart kategoriserer alle ideer og tanker om tilnærminger til algebra i undervisning, kan inndelingen allikevel være fruktbar med hensyn på situasjonsanalyse. Wheeler (1997) påpeker at alle de fire undervisningsperspektivene viser vesentlige aspekter ved algebraundervisningen, både med hensyn til lite hensiktmessige deler av tradisjonell algebraundervisning og ulike komponenter som er nødvendig i utviklingen av god forståelse av og i algebra. Som i de fleste andre situasjoner må man regne med at de grep som tas i undervisningen, vil favorisere noen typer kunnskapsutvikling fremfor andre (Wheeler, 1997). Uten at dette betyr at undervisning i henhold til ett perspektiv nødvendigvis vil fremme de typer kunnskap eller mål som dette perspektivet verdsetter, med andre ord; det er ikke gitt at problemorientert perspektiv i algebraundervisningen gir elever og etter hvert borgere som er gode problemløsere med algebra som verktøy. Når Wheeler knytter de ulike perspektivene opp imot ulikt læringsutbytte er dette like mye for å bevisstgjøre at enhver algebratilnærming vil ha en ”pris”, i form av utsatt og kanskje mindre utviklet algebraforståelse innen noen av algebraperspektivene og denne ”prisen” må man rett og slett må være villig til og ”betale”(Wheeler, 1997).

Elevers utvikling i algebra.

Harper (1987) beskriver, som tidligere redegjort for, algebraens historiske utvikling i tre uliker historiske faser; retorisk algebra med problemer og løsninger beskrevet i ord og setninger, synkopert algebra med problemer og løsninger beskrevet med forkortelser og forsiktig bruk av symboler for ukjente størrelser, og symbolsk algebra med problemer og løsninger beskrevet med utstrakt symbolbruk, der symbolets betydning knyttes til ulike betydninger - variabelbegrepet.

I sin forskning fant Harper at elever på tross av flere års undervisning med algebraisk symbolbruk foretrakk mer retoriske strategier og løsninger til problemer, selv når den symbolske løsningen var ”enklere”. Dette mente Harper indikerte at elever også må gå gjennom disse tre fasene i sin forståelse av algebra. Teorien er da at hvert individs utvikling i algebra, dvs. den ontogenetiske utvikling, vil følge algebraens historiske utvikling, den fylogenetiske utviklingen og det å nå ny erkjennelse er en tidkrevende prosess som for mange elever stopper uten at de når den fulle og endelige algebraforståelsen. Harper påpeker også viktigheten av å vektlegge bokstavers ulike roller eller betydninger i algebraen i undervisningssammenheng, siden en god del av algebraens historiske utvikling kan knyttes til nettopp endring i forståelse og bruk av bokstavsymboler.

Andre matematikkdidaktikere, som blant annet Kieran, påpekte at akkurat som det historisk tok lang tid å nå nivået symbolsk algebra, med bruk av variabelbegrepet, virker det som nettopp denne overgangen er problemfylt for mange elever også (Bjørnstad, 2002).

> ”Overgangen til symbolsk algebra fjernet meningen til de enkelte bestanddelene. Et symbolsk språk øker anvendeligheten, men siden det er svakt semantisk sett, tilhører det ingen spesiell og konkret kontekst, og det abstrakte kan skape problemer for elevene”
>
> (Bjørnstad, 2002)

At skolens algebraundervisning bør ta hensyn til algebraens historiske utvikling er det som tidligere nevnt, flere forskere som har grepet tak i. I artikkelen ”The development of algebra” (Sfard, 1995) redegjør professor Anna Sfard for algebraens historiske utvikling. I likhet med Harper deler hun inn emnets historiske utvikling i faser eller epoker. I tiden fram til Viete skiller Sfard ut 3 faser i den greske algebraens utvikling; synkopert algebra, retorisk algebra og geometrisk algebra. Hun påpeker at den Vietanske algebraen, som for mange undervisere i algebra er uløselig knyttet til algebraisk tankegang, er en forholdsvis ny oppfinnelse og ikke umiddelbart tilgjengelig for alle elever. Viktig for å sikre utviklingen av symbolsk algebraforståelse blir da god grunnleggende retorisk forståelse av emnet, siden denne skal støtte den videre forståelsen i emnet.

Den norske matematikkdidaktikeren Marit Jonhsen Høines gjør i sin forskning bruk av begrepene 1.ordens språk og 2. ordens språk for å forklare elevers problemer med den algebraiske notasjonen (Hovik, 2007). Språk av 1. orden omfatter familiære begreper som eleven selv opplever at de forstår godt, vi kan si begrepene og deres betydning er internalisert, mens språk av 2. orden er dem fjernere og oppleves som mer abstrakt, vi kan si at det ennå ikke er godt internalisert. I tillegg skiller den algebraiske formelle representasjonen lag med dagligtale med hensyn til kravet til presisjonsnivå i bruk. Disse faktorene kan bidra til at det algebraiske språket oppfattes som fremmed og abstrakt av elever.

I en annen artikkel ”On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin”, forklarer Sfard (1991) hva det er som skiller matematisk abstraksjon fra annen abstraksjon. I sitt forsøk på å besvare dette spørsmålet peker hun på at matematikken, som mange andre universitetsemner, er hierarkisk oppbygget, men at det i tillegg er slik at matematikken preges av en dualitet, kalt prosess og produkt, ved at ulike matematiske forestillinger har ett todelt fundament eller en tosidig natur. Man kan møte denne dualiteten hos mange ulike matematikkdidaktikere, i beskrivelsen og vurderingen av kunnskapens karakter som for eksempel figurativ kontra operativ, instrumentell kontra relasjonell, abstrakt kontra algoritmisk eller forklarende kontra prosedyremessig. Det er allikevel forskjell mellom mye av denne tenkningen og Sfards dualitet, i den forstand at Sfard er opptatt av at de to kunnskapstypene eller oppfatningene er komplementære, begge er nødvendige byggeklosser for god forståelse.

Matematiske forstillinger eller konsepter er altså på den ene siden dynamiske prosesser eller handlinger som kan foretas, på den andre siden evige strukturer, helheter, objekter og ideer utilgjengelig for alle våre sanser (Sfard, 1991). Matematiske fenomener kan altså ”angripes”, begripes og forklares operasjonelt og strukturelt, men det er ifølge Sfard ett stort gap mellom operasjonell og strukturell forståelse av ett matematisk konsept og det er vanligvis slik at den praktisk operasjonelle forståelsen av konseptet, utvikles før den mer teoretiske abstrakte strukturelle oppfatningen (Sfard, 1991).

Ett godt eksempel her kan være funksjonsuttrykk. Funksjonsuttrykk kan oppfattes som prosedyrer, forvandlingsmaskiner, som til hver gitt x-verdi tilordner en tilpasset y-verdi. Dersom ikke eleven også klarer å se funksjonsuttrykket som ett uttrykk for objektet; en funksjon, vil det gi liten mening for eksempel å derivere funksjonsuttrykket.

> ”Without an ability to think structurally, the learner would often feel lost: he or she would have to perform manipulating on nothing, because from her or his point of view the objects in question do not exist”
>
> (Sfard, 1992)

I algebraens tilfelle påpeker Sfard at algebraen hadde en svært operasjonell karakter i tusener av år (Sfard, 1991), i retorisk og synkopert periode. Først ved overgangen til Vietansk algebra fikk algebraen mindre prosedyrebasert karakter. Viete ga algebraen ett kraftig symbolverktøy, og tegnsystem, noe som var en nødvendig forutsetning for å utvikle en strukturell karakter. For å gå fra operasjonell til strukturell algebra må man være i stand til å generalisere og å kunne tenke abstrakt. Innføringen av symboler som kunne manipuleres med ga mulighet for å generalisere og tenke mer abstrakt og er dermed årsaken til at algebraiske begreper kan oppfattes som objekter (Bjørnstad, 2002). God begrepsforståelse og da særlig av variabelbegrepet blir vesentlig for algebralæringen, og for utviklingen av god strukturell algebraforståelse.

I en av sine artikler (Sfard, 1991), beskriver Anna Sfard overgangen mellom prosedyremessig og strukturell kunnskap. Uten å gå i detalj i Sfards teori fremhever hun at sentralt i utviklingen, er graden av løsriving fra den konkrete situasjonen. Den prosedyremessige forståelsen utvikles på sett og vis gradvis, med stigende grad av oversikt over prosessen, mens full strukturell forståelse av ett matematisk konsept forutsetter ett kvalitativt sprang i forståelse. Når ett matematisk konsept er fult ut forstått, også strukturelt, vil det å bruke prosedyrer på denne kunnskapen kunne bringe fram nye konsepter og ideer som også må gjennomgå en tilsvarende utvikling, før disse nye ideer igjen er fult ut forstått og utviklet. Strukturell eller helhetlig forståelse av fenomenet holdes frem som målet og som ett kvalitativt sprang i forståelse. Sfard påpeker som tidligere forklart nødvendigheten av begge typene forståelse siden de er utfyllende og siden den strukturelle forståelse avhenger av den prosedyremessige. Forklaringsmodellen har slik jeg ser det en del felles med Piagets syn på læring da begge forutsetter at helhetsforståelsen, er noe kvalitativt annerledes enn summen av ”delforståelser”.

Med bakgrunn i Sfards forklaringsmodell med hensyn til utvikling av matematisk og algebraisk kunnskap og egen klasseromsopplevelse av elever som gir uttrykk for opplevelse av meningsløshet i faglig sammenheng, er det fristende å påpeke at det å drive videre i undervisningssammenheng uten å oppnå forståelse av lavere nivåers matematiske konsepter vil være meningsløst. En følge for undervisningen er at det å utføre prosesser må ses på som viktig for utvikling av forståelse, ikke bare som en følge av forståelsen. Dette vil igjen ifølge Sfard (1991) bety en oppgradering av synet på betydningen av tekniske ferdigheter, etter at disse i en periode ble betraktet som behavioristisk arv og i for stor grad ble neglisjert som assimilasjon (oppgaver uten utfordring, kun rutine), uten særlig betydning for læringsutviklingen.

Å få bukt med misoppfatninger - Diagnostisk undervisning.

En sannhet som er vesentlig i fundamentet for tenkningen omkring diagnostisk undervisning i matematikk, er at av de mest betydningsfulle faktorene for innlæring av nytt fagstoff, er de erfaringer og kunnskaper elevene allerede har. Et vesentlig begrep i denne sammenheng er begrepet ”misoppfatninger”. Med begrepet misoppfatninger siktes det her til typer feil elever gjør i oppgaveløsning, som ikke skyldes slurv, men som er forholdsvis faste og stabile, samt at de går igjen hos flere elever. Matematikkdidaktikere antar disse misoppfatningene bunner i mangelfullt utviklede kunnskaper og forståelse innen matematikken generelt og algebraen spesielt (Brekke Grønmo, Rosen, 2000). Jeg vil nå kort gjøre rede for de mest typiske misoppfatninger elever viser innen algebratemaet.

Misoppfatninger i algebra.

Siden algebra henger så tett sammen med aritmetikk, er det bred enighet om at enkelt av de feilene elever gjør i løsning av algebraoppgaver, skyldes for dårlige forkunnskaper innen tallregning og tallforståelse. Typiske vansker her er problemer med prioritering av regneoperasjoner, korrekt bruk og oppløsning av parenteser, mangelfull forståelse av mengdebegrepet eller vansker med brøkregning (Hauge, 1997). Elevene er gjerne lite vant med å uttrykke seg like formelt og presist som en gjør med algebraisk symbolspråk, noe som virker å være et ”tilleggshinder” eller en ”sperre” i arbeidet med oppgaver i algebraisk språkdrakt. Selve bruken av symboler virker som det er ”fremmedgjørende” på elevene og bytte av representasjonsform for problemet eller sammenhengen, ser ut til å gjøre at mange elever ikke klarer å løse problemer som de uten symbolbruken mestret. En del elever vil også kunne la seg forvirre av at en i algebraen ofte jobber ”baklengs” sammenliknet med det de er vant med fra aritmetikken.

Også overgangen fra aritmetikk til algebra kan som tidligere omtalt, skape misoppfatninger og dermed problemer for elever. Forståelsen av likhetstegnet betydning og funksjon har for eksempel vist seg å være kilde til mangelfull forståelse i algebra. Elever har en oppfattning, fra tidligere matematikkundervisning, av likhetstegnet som et signal eller en instruksjon om å utføre beregningene i oppgaven. De har da forstått likhetstegnets transformerende funksjon, men kan samtidig ha gått glipp av likhetstegnets betydning som tegn på likeverdighet, noe som kan skape trøbbel i oppgaveløsningen;

- både ved symbolbruk i høyresiden av matematiske uttrykk. Eksempel: ”8 = X + 3”. Enkelte elever vil kunne ”settes ut” eller ha problemer med å finne en korrekt verdi av X når symbolet er oppført på ”svarsiden” i uttrykket.

- og dersom høresiden i ett matematikkuttrykk ikke ”lukkes” i form av ett bestemt tall, men gir ett uttrykk. Eksempel: ”a + a + b = 2a + b”. Mange elever vil oppleve oppgaven som uløst, siden svaret ikke har form av en bestemt verdi, den ukjente x er ikke ”funnet”.

Intuitive oppfatninger og løsningsmetoder som fungerte greit innen aritmetikken, kan vise seg å være hindre i utviklingen av algebraisk oppgaveforståelse. Matematikkdidaktikeren Kieran kaller dette som tidligere nevnt, diskontinuitet mellom aritmetikk og algebra (Norstein, 1999).

Algebraen ”låner” dessuten språkopplæringens bokstaver, uten ”å låne” språkopplæringens normer med hensyn til bruk og forståelse av algebraiske uttrykk. Fra leseopplæringen vet elevene at vi i ”skolearbeid” beveger oss ”fra venstre mot høyre” og at bokstavene skal trekkes sammen til ord sammensatt av flere bokstaver. Den matematiske konteksten gjør at normene med hensyn til bruk og forståelse av bokstavene er endret, men for noen elever vil språkfagets normer overføres til algebraopplæringen, der de kan være til hinder for gode algebrakunnskaper.

I matematikken brukes i tillegg bokstavene i ulike sammenhenger med klart ulikt meningsinnhold noe som kan bli en tilleggsforvirring for eleven med hensyn til "å få med seg” hva bokstaven representerer (Brekke, 2000). En mer objektorientert forståelse av bokstavsymbolet har vært en av de vanligste misoppfattninger knyttet til bruk av algebraiske symboler (Nygård, Pettersen, 2000). Som Nygaard og Zernichow forklarer i sin artikkel ”Den blokkerende misoppfatning”, der de påpeker at dersom eleven oppfatter symbolene a og b i uttrykket ”6a + 8b”, som forkortelser for, for eksempel appelsiner og bananer, vil det kunne skape store problemer med å gi noe meningsfull kontekst, til oppgaver av typen ”6a • 8b” (Nygaard, Zernichow, 2006).

Bokstavsymbolet forstått som utrykket for en ukjent størrelse vil også kunne skape problemer med hensyn til forståelse av symbolbruk i funksjonsuttrykk og bevis, siden eleven vil fokusere på å løse problemet snarer enn å betrakte relasjonene mellom de ulike faktorene det gjelder. Mangelfullt utviklet variabelforståelse kan dermed være blokkerende for videre utvikling av algebraisk og matematisk forståelse, og noen elever løser sitt problem med å forstå symbolets betydning ved å ignorere dette i oppgaveløsning (Brekke, 2000).

En annen typisk feil, ikke kun knyttet til algebraisk oppgaveløsning, oppstår når elever lærer seg prosedyrer eller oppskrifter knyttet til oppgaveløsning, for deretter å anvende disse ”trylleformlene” på alle ”liknende” oppgaver, selvfølgelig med varierende hell. Slike feil kombineres gjerne med mangelfull begrepsoppfatning, problemer med å gå fra en matematisk representasjon av problemet til en annen og vansker i å gjenkjenne mønstre eller generalitet i matematiske situasjoner (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000).

Diagnostisk undervisning.

Som gjennomgangen hittil viser har ulike matematikkdidaktikere forsket på misoppfatninger knyttet til algebra, samt kritiske overganger og faser i algebrainnlæringen. Andre typiske feilforestillinger er påpekt hos flere forskere, og i den forbindelse lanserer blant andre matematikkdidaktiker Gard Brekke begrepet ”diagnostisk undervisning i matematikk”,(Brekke, 1995). De ulike faser i diagnostisk undervisning kan skjematisk fremstilles slik:

”1. Identifisere misoppfatninger og delvis utviklede begreper hos elevene.

2. Tilrettelegge undervisningen slik at eventuelle misoppfatninger eller delvis begreper blir framhevet. En kaller dette å skape kognitiv konflikt.

3. Løse den kognitive konflikten gjennom diskusjoner og refleksjoner i undervisningen.

4. Bruke det utvidede (eller nye) begrepet i andre sammenhenger.”

(Brekke, 1995).

Diagnostisk undervisning i algebra og matematikk har, som leseren selv kan se, ett konstruktivistisk syn på læring, der hovedhensikten er å gi elevene anledning til å vinne erfaring som de kan tufte kunnskaper på, samt å legge til rette for refleksjon underveis i arbeidet. Viktige spørsmål i den forbindelse er;

Hva vil det si å kunne matematikk?

Hvordan utvikler elever sine ideer og begreper?

Tradisjonell klasseromsundervisning har i for stor grad fokusert på faktakunnskap og regnetekniske ferdigheter, samtidig som begrepslæringen og forståelsen er blitt neglisjert (Brekke, 1995). Brekke hevder at karakteristisk for de matematiske begreper er at de ikke har vokst fram isolert, men at de eksisterer i et nettverk av ideer – det vi kan kalle begrepsstrukturer, som gjør matematikken meningsfull og støtter de regnetekniske ferdighetene. Ett velkjent problem for matematikklærere er elever som kan gjøre beregninger korrekt, men som ikke selv klarer å se hvilke beregninger som skal til for å løse ett problem. De underliggende relasjoner mellom delene i et problem, strukturene, er skjult for dem, samtidig som de kan alle regler til punkt og prikke. Elevene har da tydelig høyere prosedyremessig forståelse enn strukturell forståelse av situasjonen og de har utviklet det vi kan kalle en ufullstendig oppfatning knyttet til ett matematisk begrep eller konsept.

Et vesentlig aspekt i ideen om diagnostisk undervisning i matematikk er som nevnt elevers misoppfatninger, forstått som ufullstendige, men gjerne konsekvente tanker, knyttet til et matematisk begrep. Utgangspunktet er at elever gjør feil i løsningen av ulike matematiske oppgaver, og at flere av disse feilene ikke skyldes slurv eller tilfeldigheter, men tvert imot er ett resultat av en bestemt ide eller tenkning. Siden nye ideer og konsepter i faget må fortolkes og forstås på grunnlag av eksisterende ideer og forståelse, vil elever få misoppfatninger innimellom, enten på grunnlag av overgeneralisering eller ved at de trekker feil slutninger i læring av nytt stoff.

I matematikkundervisningen blir det da vesentlig å bruke diagnostiske oppgaver der en bevist lar elevene møte problemer som er slik at de bringer misoppfatninger frem i dagen, det vil si avslører feiloppfatningene eller manglene i forståelse. Hensikten er å rydde misoppfatningene av vegen ved hjelp av fremprovosert kognitiv konflikt og påfølgende konfliktdiskusjon. ”Metoden inneholder altså en ”destruktiv” fase, med det siktemål å gjøre det tydelig at gamle ideer er unøyaktige eller utilstrekkelige, og en løsningsfase, hvor diskusjoner og refleksjoner omkring det en har funnet ut, er det sentrale”(Brekke, 1995). Sammenliknende studier har ifølge Brekke vist at diagnostisk undervisning har bedre langtidseffekt med hensyn til læringsutbyttet, enn tradisjonell undervisning (Brekke, 1995).

Oppsummering.

Universaloppskriften på læring, som lærere gjerne kunne ønske seg, lar seg ikke oppdrive, på tross for stor økning i forskning av matematikkdidaktisk karakter de siste 30 år. I de matematikkdidaktiske miljøer, samt læreplaner og lærebøker i matematikk, har en form for konstruktivistisk tankegang omkring matematikklæring vunnet terreng. Algebraens nære sammenheng med aritmetikken er tydeligere fremhevet og understreket i nyere læreverk og læreplaner, der sammenhengen mellom algebra og likninger før gjerne var mer i fokus. Induktiv og retorisk tilnærming til algebraens fagstoff er blitt dominerende i dagens matematikklærebøker og den matematiske klassesamtalen og undringen over mønstre og generaliteter har blitt løftet mer frem. Samtlige av dagens lærebøker presenterer algebraen nært knyttet opp imot geometrien og i de matematikkdidaktiske miljøer er det gjort en del forskning på overganger mellom aritmetikk og algebra, samt overgangen mellom ulike former for forståelse og kunnskap omkring et tema eller et matematisk konsept. Forskningen har vært opptatt av å unngå mangelfullt utviklet forståelse av et matematisk konsept eller tema, dualiteten mellom et begreps prosedyremessige og strukturelle aspekt, samt å få bukt med direkte feiloppfatninger en har funnet at elever ofte kan ha i algebraen og matematikken.

En beskrivelse av undersøkelsen, gjort er gjort

Innledning

Det sjuende kapitel omhandler undersøkelsen. Hva omfatter denne? Hvordan er den laget? På bakgrunn av hvilke kilder? Hvordan var gjennomføringen av undersøkelsen? Samt en diskusjon omkring undersøkelsens reliabilitet og dataenes validitet.

Spørsmålene i undersøkelsen.

Undersøkelsen bygger som nevnt i stor grad på læringssenterets prosjekt; Kvalitet i matematikkundervisningen, dette var en studie av grunnskoleelevers misoppfatninger i algebra. Dette prosjektet gjennomført i skoleåret 1996/97 og var en omfattende undersøkelse av den gangens 5., 7. og 9. klasse, hvor det ble avdekket vanlige misoppfatninger i algebra blant norske grunnskoleelever. Av deres opprinnelige oppgavesett med 15 algebraoppgaver for 9. klasse har jeg tatt i bruk om lag 9, men i en noe annen rekkefølge og innimellom i en litt annerledes orddrakt. Disse oppgavene er utprøvde flere ganger og går for å være valide.

I tillegg la jeg inn en oppgave av typen aldersgåte, en oppgavetype en kan se igjen i flere av læreverkene, der elevene også ble bedt om å forklare hvordan de kom frem til svaret. Fra Læringssenterets ”Veiledning til algebra” har jeg i tillegg hentet en oppgave som omhandler sammenhengen mellom symbol og algebrauttrykk. I mitt oppgavesett er det med andre ord 11 oppgaver for å kartlegge elevers tenking i algebra.

Oppgavesettet er forsøkt å lage slik at det kan fange opp kunnskaper både av operasjonell og strukturell karakter, samt avdekke de vanligste misoppfatninger vi kjenner i algebratemaet. Når oppgavedelen av undersøkelsen er blitt redusert i forhold til KIM - prosjektets undersøkelse, så kommer dette av at jeg også ville at en del av undersøkelsen skulle fortelle noe om elevenes tenkning om algebra.

For den delen av undersøkelsen som dreier seg om hvordan elever tenker om algebra har jeg laget et spørreskjema med 4 hovedbolker. For denne delen av undersøkelsen har jeg også hentet inspirasjon fra et annet av læringssenteret KIM - prosjekter, en undersøkelse gjort på grunnskolens 6. Og 9. Trinn i skoleåret 1997/98, hensikten med dette prosjektet var å kartlegge tanker elever og lærere gjør seg omkring matematikkfaget. Forskerne forklarer at deres undersøkelse dreier seg om matematikkfagets affektive side, og at de har forsøkt å kartlegge elevers syn på faget, emosjon knyttet til faget og elevers holdninger til faget.

Ingen av påstandene og spørsmålene i dette prosjektet kunne brukes i sin originale utgave i min undersøkelse, derfor består denne delen av undersøkelsen av mine egne formuleringer og spørsmål, men som sagt inspirert av KIM - undersøkelsen. Også på dette området vil mitt arbeid ha et noe mindre omfang enn læringssenterets prosjekt, og mitt hovedfokus ligger på elevens syn på algebrafaget. Jeg har i min undersøkelse noen spørsmål som er ganske sammenliknbare med flere spørsmål i det omtalte KIM - prosjektet, men andre deler av undersøkelsen dreier seg om aspekter som Kim-studien ikke berører. Dette gjelder for eksempel spørsmålet som omhandler hvilken forestillingsform av en funksjon eleven foretrekker og spørsmålet omkring hvilke deler av matematikken elevene mener algebraen er nærest tilknyttet.

Hvorvidt de innsamlede data er relevante, valide, med tanke på forskningsspørsmålet vil det selvfølgelig gå an å diskutere. Jeg opplever at jeg har funnet en del gode spørsmål for å kunne si noe om hvordan elevene i utvalget tenker om algebra, men det er selvfølgelig en masse som ikke fanges opp av mine spørsmål. Undersøkelsen er i sin helhet vedlagt oppgaven slik at leseren selv kan vurdere validiteten til det innsamlede datamaterialet.

Den ferdige undersøkelsen tar først for seg påstander og spørsmål omkring algebra, og deretter oppgaver i algebra. Hvert enkelt av spørsmålene, påstanden og oppgavene i undersøkelsen vil bli presentert i forbindelse med behandlingen av elevenes respons på denne biten av undersøkelsen.

Elevgruppen og utvalget – rammene for undersøkelsen

Undersøkelsen ble gjennomført i uke 36 høsten 2009, i 3 ulike matematikklasser ved Skien videregående skole der jeg jobber. Elevgruppen i utvalget er hentet fra mine egne klasser og består av 60 elever, hvorav 15 er gutter og 45 er jenter. Elevene kommer fra 4 ulike skoleklasser, det vil si en 3. klasse med påbyggingselever der 23 elever var tilstede ved undersøkelsestidspunktet, og 37 elever fra 3 ulike 1. klasser, hvor alle elevene i utvalget følger det minst avanserte matematikkfaglige kurset på 1.klassenivå - 1p.

Utvalget er som beskrevet skjevt både med hensyn til kjønnsfordeling og antagelig ferdigheter i faget, noe som gjør at det ikke er representativt for populasjonen ungdommer. Utvalget som ikke er spesielt stort, er heller ikke tilfeldig uttrukket, og disse faktorene vil kunne ha en del å si for resultatene i undersøkelsen. Disse svakhetene ved undersøkelsen fører til at man kan ikke trekke noen allmenngyldige konklusjoner på bakgrunn av min undersøkelse, men den kan kanskje allikevel være med på å gi ett inntrykk av hvordan noen eller en del elever, opplever faget.

Elevene ble på forhånd forespurt om å delta i undersøkelsen og underveis i undersøkelsen har elevene hatt tilgang til egen kalkulator. Ved undersøkelsestidspunktet hadde elevene ennå ikke mottatt lærebøker i faget, og i liten grad hatt undervisning i matematikkfaglige emner på videregående skole ennå. Siden utvalget kun er gjort av 1p- og påbygningselever, er det å vente at elevgruppa har en annen faglig bakgrunn i matematikkfaget, enn et bredere utvalg sannsynligvis ville ha, og utvalgets ”prøveresultater” er ikke nødvendigvis sammenliknbare med landsresultatene i KIM - prosjektet.

På generell basis er det verdt å merke seg at tilfeldige utvalg av elever fra Telemark, ofte har en litt lav skår på ulike ”kunnskapsmål” som standpunktkarakterer fra grunnskolen eller kunnskapstester som nasjonale prøver, og at det i fylket er en trend til at noen flere av elevene velger yrkesfaglig utdannelse enn trenden er for landsgjennomsnittet (udir). Det generelle utdannelsesnivået til befolkningen (og foreldrene) er ikke spesielt høyt, noe som gjerne trekkes frem som forklaringsvariabel både med hensyn på elevenes utdanningsvalg og karakter eller ”kunnskapsnivå”

Datainnsamlingen

Spørsmålene og påstandene i undersøkelsens del 1 er en blanding mellom flervalgsspørsmål og noe mer åpne spørsmål. De innsamlede dataene til denne delen av undersøkelsen vil dermed hovedsakelig være av kvantitativ karakter, med noen innslag av data av mer kvalitativ karakter. Flervalgsspørsmål i undersøkelsen er kodet med verdier fra 5 til 1, der 5 tilsvarer helt enig i påstanden, mens 1 tilsvarer helt uenig i påstanden. For et par av de andre spørsmålene i undersøkelsen er det kun registrert hvilket alternativ elever har valgt, uten å kode dette på noe spesielt vis.

I andre del av undersøkelsen, er det algebraoppgavene vi møter, og ingen av dem gir data som på forhånd er så ferdigdefinert som hva flervalgsoppgavene gir. Oppgavene i denne delen av undersøkelsen er dermed mer åpne i formen, men graden av åpenhet varierer fra oppgave til oppgave. I oppgaver med et rett eller galt svar er det i en kolonne i den statistiske behandlingen registrert hvorvidt svaret er korrekt, med verdien 1 for korrekt svar og 0 for galt svar, mens jeg i neste kolonne har registrert selve svaret. For de mest åpne oppgavene har jeg registrert stikkord omkring hva elevene har svart i den statistiske registreringen av dette, slik at jeg lettere kunne finne tilbake til riktig spørreskjema for mer inngående studie av enkeltsvar eller enkeltforklaringer.

Totalt sett kombinerer dermed undersøkelsen kvantitative metoder som den statistiske behandlingen utgjør, med mer kvalitative metoder, som til eksempel analyse av elevers enkeltsvar i undersøkelsen. I oppgave 8 i undersøkelsen hadde det sneket seg inne en skrivefeil i oppgaveformuleringen, jeg hadde skrevet kr istedenfor kg, noe som ble formidlet muntlig til elevene under forsøket. I den statistiske behandlingen kan jeg allikevel se at denne feilen har fått følger for elevene respons på oppgaven, denne oppgaven er dermed sløyfet i den videre behandlingen.

I det neste kapitel vil jeg foreta en deskriptiv statistisk behandling av datamaterialet, sammen med analyse av de innsamlede data av mer kvalitativ karakter, som ikke egner seg for en statistisk behandling. Behandlingen vil ha et særlig fokus på de kvalitative dataene i undersøkelsen.

Jeg fant, jeg fant.

Hva viser undersøkelsen?

I denne gjennomgangen vil jeg først drøfte funn og resultater knyttet til undersøkelsens første del som dreier seg om metalæring, elevenes tanker om algebra, hvordan de opplever emnet, hvordan dette emnet best læres, hva det henger sammen med i matematikkfaget og hvordan eleven foretrekker informasjon fremstilt. Deretter vil jeg se nærmere på og diskutere elevsvarene i del 2 av undersøkelsen som tar for seg hvordan elevene tenker i algebra, hvordan de løser oppgaver og hvilke feil de begår.

Undersøkelsen bygger som nevnt i stor grad på KIM - studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000) omkring grunnskoleelevers misoppfatninger i algebra og jeg har også hentet inspirasjon fra KIM - prosjektets kartlegging av tanker elever og lærere gjør seg omkring matematikkfaget (Streitlien, Wiik, Brekke, 2001). Hver enkelt del av undersøkelsen og resultatene til denne delen vil presenters gjennom ord, frekvenstabeller og figurer og diskuteres opp imot relevant teori, og gjerne tilsvarende resultater fra den omtalte Kim-studien presentert i heftet ”Veiledning til algebra” (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000). Denne undersøkelsen vil bli referert til både som den nasjonale undersøkelsen, Kim-undersøkelsen, Kim-studien eller undersøkelsen av landets 10.klassinger. Jeg har i liten grad gjort statistiske beregninger om hvorvidt tendenser eller ulikheter i mitt utvalg er tilfeldige eller ei, siden utvalget ei er representativ for populasjonen ungdommer.

I undersøkelsens første del møter elevene flere påstander de skal ta stilling til, noen ganger spissformuleringer og andre ganger mer moderate påstander. Majoriteten av elevene har besvart eller tatt stilling til alle påstandene i denne delen av undersøkelsen som dreier seg omkring hvordan elevene opplever og tenker om emnet. Under registrering oppdaget jeg et par enkeltelever som ikke svarte det jeg oppfatter som konsistent, kanskje sa de seg enig i en påstand som de i neste spørsmål sa seg litt uenig i igjen. Sannsynligvis opplever ikke eleven selv at dens meninger er inkonsistente, men som den som betrakter utenfra, undrer jeg om ikke elever kanskje blir de lokket til å ta litt hardt i noen ganger i enkelte spissformulerte påstandene.

I undersøkelsen andre del varierer det noe mer i hvor stor grad alle oppgaver er besvart, og generelt kan en si at svarprosenten går noe ned utover i undersøkelsen. I ettertid ser jeg derfor at studien kanskje inneholdt i overkant mange spørsmål og oppgaver. Elevene tilhører som sagt enten 3 klasse med matematikkurset praktisk påbygging eller 1 klasse med matematikkurset praktisk matematikk. I den statistiske gjennomgangen vil jeg gå inn på variabelen kjønn og klassetilhørighet (1p eller 3p), i den grad det er interessante ulikheter i svarfordelingen.

Hvordan tenker elevene om algebra?

Svarfordelingen i undersøkelsen fordeler seg som tabellen på neste side vil vise.

Ta stilling til påstandene	Prosentandel elever som sier seg:					
	Helt enig	Litt enig	u-sikker	Litt uenig	Helt uenig	sum
Algebra er lett	5	30	16,7	30	16,7	98,4
Jeg forstår algebra godt	6,7	6,7	45	23,3	16,7	98,4
Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget	10	20	18,3	35	15	98,3
Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra på skolen	6,7	13,3	25	21,7	31,7	98,4
Algebra er som et nyttig verktøy som hjelper meg å løse problemer	3,3	13,3	23,3	25	31,7	96,6
Det er viktig å bli god i algebra for å bestå eksamen	21,7	33,3	33,3	8,3	1,7	98,3
Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken	6,7	18,3	40	10	23,3	98,3
Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver	10	35	25	18,3	10	98,3
Det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk	3,3	36,7	31,7	16,7	10	98,4
Det er ikke så viktig å bli god i algebra for de som ikke skal forsette med matematikk	20	25	26,7	23,3	3,3	98,3
Det er viktig å bli god i algebra for å få en god jobb	0	8,3	31,7	25	33,3	98,3
Algebra har jeg bare bruk for i matematikktimene	33,3	21,7	15	21,7	6,7	98,4
Algebra er nyttig i flere skolefag	3,3	13,3	30	28,3	21,7	96,6
Algebra har lite med virkeligheten å gjøre	28,3	21,7	28,3	15	5	98,3
Jeg ønsker meg et yrke der jeg får bruke algebra	0	6,7	5	13,3	73,3	98,3
Jeg har ikke bruk for å lære algebra	21,7	23,3	25	21,7	6,7	98,4
Mine foreldre bruker ikke algebra i sine yrker eller sin hverdag	38,3	16,7	30	8,3	5	98,3

Figur 9,1: Prosentfordeling av svar på spørsmål 1-17.

I undersøkelsen måtte elevene ta stilling til ulike påstander om sitt forhold til og oppfatning av algebra. Elevene sa seg helt enig, litt enig, usikker, litt uenig eller helt uenig i påstanden og disse svarene ble kodet med heltallsverdiene fra 5 til 1. Som leseren selv kan se varierer graden ev enighet med påstandene en god del og en elev har konsekvent hoppet over alle spørsmål i denne delen av undersøkelsen. Funnene knyttet til hvert enkeltspørsmål vil bli behandlet nærmere i den videre redegjørelsen. Jeg vil først se nærmere på gjennomsnittsverdier for de forskjellige av disse spørsmålene, både for gruppa som helhet og kjønnssegregert. Tabellen under vil også presentere standardavviket for hver påstand, altså spredningen i responsen for dette punktet av undersøkelsen.

Påstand	**Gjennomsnitt**			**Standardavvik**		
	Alle	**Jente**	**Gutt**	**Alle**	**Jente**	**Gutt**
Algebra er lett	**2,72**	**2,73**	**2,67**	**1,25**	**1,23**	**1,35**
Jeg forstår algebra godt	**2,63**	**2,62**	**2,64**	**1,07**	**1,09**	**1,01**
Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget	**2,75**	**2,89**	**2,29**	**1,24**	**1,23**	**1,20**
Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra på skolen	**2,41**	**2,47**	**2,21**	**1,26**	**1,27**	**1,25**
Algebra er som et nyttig verktøy som hjelper meg å løse problemer	**2,29**	**2,16**	**2,71**	**1,17**	**1,08**	**1,38**
Det er viktig å bli god i algebra for å bestå eksamen	**3,66**	**3,71**	**3,50**	**0,98**	**0,97**	**1,02**
Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken	**2,75**	**2,60**	**3,21**	**1,21**	**1,18**	**1,25**
Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver	**3,17**	**3,16**	**3,21**	**1,16**	**1,19**	**1,12**
Det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk	**3,07**	**3,11**	**2,93**	**1,05**	**1,03**	**1,14**
Det er ikke så viktig å bli god i algebra for de som ikke skal forsette med matematikk	**3,36**	**3,29**	**3,57**	**1,16**	**1,22**	**0,94**
Det er viktig å bli god i algebra for å få en god jobb	**2,15**	**2,27**	**1,79**	**1,00**	**0,99**	**0,97**
Algebra har jeg bare bruk for i matematikktimene	**3,54**	**3,56**	**3,50**	**1,34**	**1,36**	**1,34**
Algebra er nyttig i flere skolefag	**2,47**	**2,52**	**2,29**	**1,10**	**1,17**	**0,83**
Algebra har lite med virkeligheten å gjøre	**3,54**	**3,56**	**3,50**	**1,21**	**1,20**	**1,29**
Jeg ønsker meg et yrke der jeg får bruke algebra	**1,44**	**1,44**	**1,43**	**0,88**	**0,94**	**0,65**
Jeg har ikke bruk for å lære algebra	**3,32**	**3,38**	**3,14**	**1,24**	**1,28**	**1,10**
Mine foreldre bruker ikke algebra i sine yrker eller sin hverdag	**3,76**	**3,87**	**3,43**	**1,21**	**1,18**	**1,28**

Figur 9.2: Svargjennomsnitt på spørsmål 1-17

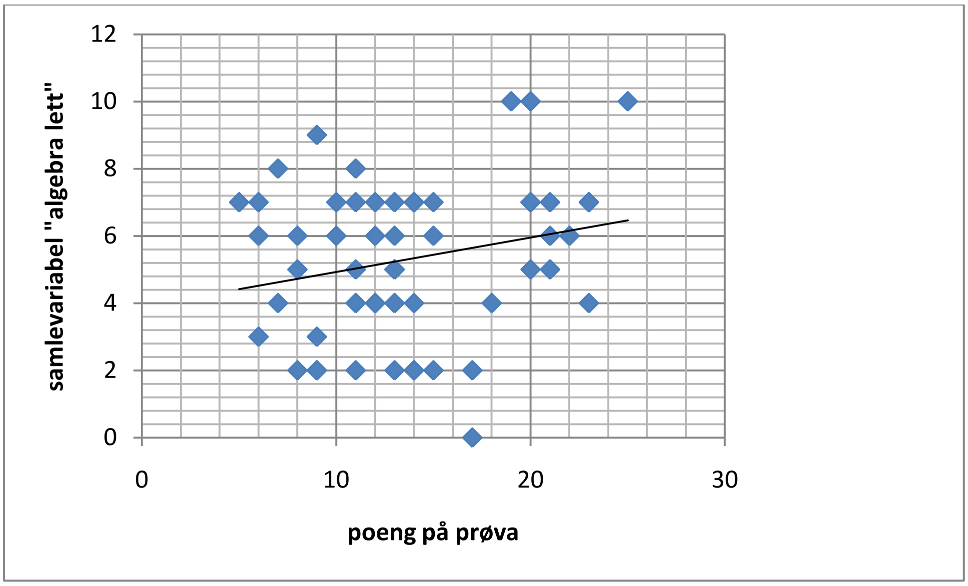
Oppfattes algebra som vanskelig?

Jeg vil bruke elevenes svar på påstandene ”Algebra er lett”,” Jeg forstår algebra godt”, ”Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra”, ”Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken”, ”Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver” og ”Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget” til å belyse spørsmålet. Utvalget av påstander fra undersøkelsen kunne nok ha blitt gjort noe annerledes, da det ikke er helt enkelt for elever å separere sine holdninger til algebra fra sine ferdigheter og kunnskaper i emnet.

I de første påstandene må elevene ta stilling til om de oppfatter algebra som lett eller ikke. Når elevene blir bedt om å vurdere hvorvidt algebra er lett eller ikke, og om de forstår algebra eller ikke, oppgir 16,7 % av utvalget at de er helt uenig i både påstanden ”Algebra er lett” og ”Jeg forstår algebra godt”, mens kun 5 % og 6,7 % er helt enig i utsagnene. Svarfordelingen med hensyn til den første påstanden er mye jevnere fordelt mellom de ulike svarkategoriene, med henholdsvis 30 % for både litt enig og litt uenig, og andelen usikre elever er lav (16,7 %) sammenliknet med flere av de andre påstandene i undersøkelsen. Elevgruppa totalt er noe uenig i at algebra er lett med et svargjennomsnitt på 2,71, men den helt store negative stemningen til emnet, klar beskjed om vanskelighetsgraden, kan en overraskende nok ikke oppdage. Guttene i utvalget oppgir i noe større grad enn jentene at de er uenig i påstanden, og det er litt større spredning i guttenes svarrespons enn hva angår jentegruppas, men de store forskjellene er det ikke snakk om.

Med hensyn til utsagnet ”Jeg forstår algebra godt” er fordelingen meget skjev, elevene er i all hovedsak enten uenige i påstanden, som til sammen 40 % av dem oppgir at de er, eller de er usikre på egen algebraforståelse – hele 45 % velger dette svaralternativet i sin respons på påstanden. Siden sentrumsgruppa utgjør en stor del av elevgruppa gir dettet totalt sett et gjennomsnitt på 2,63 for påstand 2, elevene er mer uenig i at de forstår algebra godt enn de er uenig i at algebra er lett. Det er bortimot ingen kjønnsforskjell med hensyn til svarverdiene til påstanden og kjønnsforskjellen med hensyn til spredningen i svarene i undersøkelsen er på dette spørsmålet ubetydelig, men av verdien på standardavvikene ser vi at spriket i utvalgets respons er lavere på dette spørsmål enn hva som var tilfelle på første påstand.

For å sammenlikne elevenes vurderinger knyttet til disse 2 påstanden og den gitte elevens poengskår i undersøkelsen, oppretter jeg en samlevariabel for elevens skår på de to spørsmålene samlet og kaller denne ”Algebra er enkelt”.



Figur 9,3: Korrelasjon mellom vurdering av algebra og poengskår i undersøkelsen.

Korrelasjonen mellom elevenes svar på disse spørsmålene eller samlevariabelen ”Algebra er enkelt” og skår på prøva, er ikke overraskende en positiv korrelasjon, men kun på 0,23. Sammenhengen er ikke spesielt sterk eller entydig, men vi kan finne en svak tendens til at elever som vurderer algebra som enkelt, skårer bedre på prøvedelen av undersøkelsen, enn elever som vurderer algebra som vanskeligere. Sammenhengen er svakere enn hva man kanskje ville forvente, noe som kanskje har sammenheng med at elevene forklarer egne dårlige prøveresultater med andre variabler enn emnets vanskegrad, eksempelvis; flaks, arbeidsinnsats eller at hukommelsen svikter. Verdt å merke seg i denne sammenhengen og en utfordring i undervisningssituasjon, er det at en god andel av elevene, på disse 2 påstandene, viser frem et faglig selvbilde som i liten grad korresponderer med deres faglige prestasjoner i undersøkelsen.

I et senere spørsmål blir de samme elevene bedt om å ta stilling til påstanden ”Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver”. 45 % av elevene sier seg enten enig eller litt enig i påstanden, noe som gir et gjennomsnitt på 3,17 i gruppas vurdering av påstanden. Gruppa er altså tilsvarende enig i denne påstanden som de var uenig i de foregående, dog er det ved denne påstanden en noe større spreding med hensyn til utvalgsresponsen enn hva tilfellet var i vurderingen av egen forståelse i algebra. Igjen er det en forholdsvis liten kjønnsforskjell med hensyn til gjennomsnittsskår, denne gangen i guttenes favør og guttene er også en tanke jevnere i sine vurderinger og svar enn hva jentene er.

En annen påstand som mer indirekte dreier seg om algebraens vanskegrad er påstanden ”Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken”. Hele 23,3 % av respondentene svarer at de er helt uenig i påstanden, mens kun 6,7 % av elevene sier seg helt enig i påstanden. Igjen er gruppa usikre elever stor, 40 % av elevene vet ikke helt hva de mener om denne påstanden. Resultatet er verdt å merke seg da algebraen som tema innimellom trekkes frem som forklaringsfaktor på elevers synkende interesse for matematikkfaget utover i grunnskolen (Streitlien, Wiik, Brekke, 2001). Om det er algebraen som tema som kan forklare en god del av denne utviklingen i elevers interesse i matematikkfaget utover i grunnskolen, virker ikke denne elevgruppa særlig bevisst på hvordan temaet har formet deres fagopplevelse.

Totalt oppgir elevene å være moderat uenig med hensyn til innholdet i påstanden om at algebraen har endret deres forhold til matematikken, med ett svargjennomsnitt på 2,75, altså er trenden i utvalget en generell tendens til at de er noe mer uenig i påstanden enn enig. I akkurat denne påstanden er det verdt å merke seg at kjønnsforskjellen er betydelig, guttene mener med et gjennomsnitt på 3,21 at det å lære algebra har endret deres forhold til matematikken, mens jenten med gjennomsnittsverdien 2,60 ser ut til være klart uenig i påstanden, å lære algebra har ikke endret deres forhold til matematikken. Med et standardavvik på 1,21, er spredingen i svarfordelingen er på nivå med den første påstanden i undersøkelsen, og nokså lik for begge kjønn.

I utvalget er det en svak positiv korrelasjon på 0,20 mellom elevens vurdering av om algebra er vanskeligere enn andre matematikkemner og om innføringen i emnet har endret elevens opplevelse av matematikken. Det er altså en svak tendens til at elever som har sagt seg enig i at algebra er spesielt vanskelig også er enig i at opplæring i dette har endret deres forhold til matematikken, men elevene virker i liten grad å ha ”algebraen i vrangstrupen” slik enkelte personer, nevnt innledningsvis, oppga at de hadde, eller antok at andre hadde.

I påstanden ”Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra” er det i utvalget igjen en skjevfordeling der over 50 % av elevene er enten litt eller helt uenig i påstanden, og i tillegg er 25 % av elevgruppa usikker med hensyn til påstanden. Kun ¼ del av elevene samtykker i påstanden og mener at de var bedre i matematikk før de begynte med algebra. Igjen gir elevene i liten grad inntrykk av at algebraen har endret deres matematikkopplevelse eller forståelse, som gruppe er de forholdsvis uenig i utsagnet med en gjennomsnittsverdi på 2,41. Spredningen i svarfordelingen er igjen på nivå med spredingen i påstand 1, og det er ingen kjønnsforskjell med hensyn til dette. Verdt å merke seg er at guttene med et gjennomsnitt på 2,21 virker til å være mer uenig i påstanden enn hva jentene med det mer moderate snittet 2,47 er. Når algebra i større grad har endret utvalgsguttenes forhold til matematikkfaget, ifølge deres egne svar i denne undersøkelsen, så kan det da se ut til at det ikke dreier seg om en endring fra å føle seg flink i faget til ikke å føle seg flink i faget, samtidig som guttene jo i litt større grad oppgir at de opplever algebraoppgaver som vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver, hva det nå enn er?

I andre undersøkelser som har sett på det vi kan kalle elevenes selvtillit i matematikkfaget, her vil jeg referere til KIM - prosjektet (Streitlien, Wiik, Brekke, 2001), har man konkludert med at en kan se en tendens til at guttene til en viss grad overvurderer egne evner og kunnskaper i faget, sett i forhold til jentenes faglige selvtillit og begge gruppenes skår på matematikkundersøkelser. Denne tendensen til kjønnsforskjell med hensyn faglig selvtillit kan man ikke på samme måte spore i denne undersøkelsen så langt, men man kan se en tendens til at flere gutter er enig i at det å lære algebra har endret deres opplevelse av matematikken uten at det er gitt på hvilken måte denne endringen oppleves.

Tidligere undersøkelser, deriblant TIMSS (Lie, Kjærnsli, Brekke, 2000), har vist at generelt er det ofte en liten ikke signifikant forskjell i guttenes favør, med hensyn til kjønnenes skår i ulike undersøkelser av elevers kunnskaper matematikkfaget. Denne undersøkelsen er således intet unntak, når jeg har beregnet en poengskår på algebraoppgavene i undersøkelsen finner også jeg en liten slik poengskårforskjell i guttenes favør. Mens jentene i undersøkelsen har ett gjennomsnittsprøveskår på 13av 32 poeng, har guttene et gjennomsnittlig prøveskår på 16 poeng.

Poengskårene er jo ikke spesielt høye, dette var forøvrig ventet på grunn av utvalgets sammensetning og oppgavenes karakter, men sett i sammen med hvor lite negative elevene er til algebraens vanskelighetsgrad og hvor positive de er til egne evner og muligheter til å få dette til, kan man jo grunne over hva de betrakter som forklaringen på egne utilstrekkelig løsningsmetoder og feilsvar på prøver generelt og denne undersøkelsen spesielt. Kanskje dreier påstandene for dem seg om sammenlikning opp mot andre emner eller fag de betrakter som vanskeligere eller får mindre til i, eller kanskje forklaringer som uflaks, manglende innsats osv. vil trekkes frem slik at de ikke opplever at det er noen motsetning mellom deres opplevde selvtillit i emnet og faglige prestasjoner.

Når elevene skal utale seg om hvorvidt algebra er noe av det de liker minst i matematikkfaget, oppgir til sammen 50 % at de er enten uenig eller litt uenig i at algebraen er det de liker minst i matematikkfaget, kun om lag 30 % er enig eller litt enig i at algebra er noe av det de liker minst i faget. For gruppa som helhet finner vi ett gjennomsnitt på 2,75, de er tilbøyelig til å være litt mer uenig enn enig i at algebra er noe av det de liker minst i matematikkfaget. Igjen er det en klar kjønnsforskjell i utvalget, denne gangen slik at guttene som gruppe med et snitt på 2,29 er mer klart uenig i påstanden, mens jentene som gruppe med snittet 2,89 er mer nøytrale. Nok en gang er spredingen i svarfordelingen på nivå med påstand 1 og kjønnsforskjellene med hensyn til spredningen helt ubetydelige.

Elevenes svar på dette spørsmålet korrelerer med en koeffisient på 0,52 med deres vurdering av om de var gode i faget frem til introduksjonen av algebra, det er altså en tendens til at elever som hevder at algebra er noe av det de liker minst i faget også mener at innføringen av dette emnet har medført at de er dårligere i faget enn tidligere. En tilsvarende korrelasjon på 0,52 finner vi også mellom det å like algebra dårligst av emnene i matematikk og opplevelsen av at innføringen i emnet har endret elevens opplevelse av matematikkfaget. Overraskende nok er korrelasjonen mellom vurderingen av algebra som det man liker minst i faget og vurderingen knyttet til utsagnet algebraoppgaver er mye vanskeligere enn andre matematikkoppgaver, bare på 0,3, sammenhengen mellom disse er med andre ord svakere enn de tidligere nevnte sammenhengene. Vi kan bare spekulere i hva som kan være årsaken til dette, kanskje dreier det seg om tilfeldigheter, kanskje har det sammenheng med at utsagn 8, (Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver) skiller seg fra de øvrige behandlet i dette avsnittet, da dette utsagnet kan sies å være av noe mer upersonlig karakter enn hva mange av de andre påstandene er.

Guttene er som tidligere vist, klart uenig i at algebra er noe av det de liker minst i matematikkfaget. Resultatet er interessant sett opp imot guttenes opplevelse av at algebraen har endret deres forhold til matematikken og at de samtidig opplever at algebraoppgaver er vanskeligere enn andre oppgaver, kanskje de rett og slett opplever at i algebraen får de noe å bryne seg på og at dette er en positiv opplevelse? I den grad man kan si at påstanden, ”Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget”, fanger en dimensjon av elevens selvtillit med hensyn til faget, vil jo de statistiske analyseresultatene på dette punktet underbygge tidligere studiers kjønnsulikhet med hensyn til faglig selvtillit.

For alle de 4 påstandene, ”Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget”, ”Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra på skolen”, ”Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken” og ”Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver”, gjelder det at det i utvalget ikke er noen korrelasjon mellom elevens svar på dette spørsmålet og poengskår på undersøkelsens prøvedel. Jeg kan altså i dette utvalget, ikke spore noen sammenheng mellom elevens ”algebranivå”, i den grad poengskåret kan brukes som variabel for dette, og syn på om emnet har endret fagopplevelsen eller prestasjonene, om emnet oppleves vanskeligere enn annen matematikk eller er det eleven liker minst i faget.

Opplever elevene at algebra er nyttig?

For å belyse spørsmålet vil jeg se nærmere på svarene på noen påstander i undersøkelsen som ”Algebra er som et nyttig verktøy som hjelper meg å løse problemer”, ”Det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk”, ”Det er ikke så viktig å bli god i algebra for de som ikke skal fortsette med matematikk”, ”Algebra har jeg bare bruk for i matematikktimene”, ”Jeg har ikke bruk for å lære algebra”, ”Det er viktig å bli god i algebra for å få en god jobb”, ”Algebra er nyttig i flere skolefag” og ”Algebra har lite med virkeligheten å gjøre”. Ulike aspekter av algebraens nytteverdi vil jo være er emnet funksjonelt i faget, er det nyttig i skolehverdagen eller er det utrustning for hverdagslivet og voksenlivet. Samfunnet har jo ved plassering av emnet i skolen vurdert det slik hen at emnet er nyttig eller funksjonelt med tanke på alle disse aspektene, men kommer denne vurderingen elevene til del eller sitter de med en annen opplevelse?

”Algebra er som et nyttig verktøy som hjelper meg å løse problemer” er en av påstandene i undersøkelsen. Svarfordelingen med hensyn på denne påstanden er svært skjev, hele 31,7 % av elevene er klart uenig i utsagnet, mens 25 % er litt uenig i påstanden, kun om lag 17 % av elevgruppa sier seg enig eller litt enig i at algebra er som et matematikkverktøy for dem. Gruppas gjennomsnittsskår med hensyn til denne oppgaven er på 2,29, jeg finner med andre ord en klar tendens til at elevene er uenig mer enn enig i påstanden om at algebra er et nyttig verktøy, og med et standardavvik på 1,05 er det er ikke den helt store spredningen i elevenes respons på dette punktet, sammenliknet med de andre punktene i denne undersøkelsen. Igjen er det en betydelig forskjell mellom jentegruppa og guttegruppa i utvalget, på den måten at jentene med ett snitt på 2,16 er klart uenig i påstanden, mens guttene med ett snitt på 2,71 er noe mer nøytrale og positive til å oppfatte algebraen som ett nyttig eller funksjonelt verktøy.

Et av målene med algebraopplæringen er at elevene skal kunne anvende algebraen som et verktøy for å løse ulike problemer, men å betrakte algebraen som et verktøy virker fremmed for elevgruppa i undersøkelsen. Det kunne være fristende å dvele ved hvilken opplevelse eller beskrivelse gruppa da har av algebra – kanskje et hinder som kan løse enkle problemer på en kunstig avansert måte, slik flere matematikkdidaktikere, blant annet Wheeler har kommentert (Wheeler, 1996). Hvilken del av påstanden elevene har hatt fokuset på i sin betraktning omkring påstanden, altså hvorvidt det er et nyttig verktøy eller hvorvidt verktøyet er nyttig for dem eller hvorvidt det løser egentlige problemer, kan jo også diskuteres og ha betydning for svarfordelingen til oppgaven.

Det at svært få elever i gruppa oppfatter algebra som et effektivt verktøy, får meg til å tenke at for elevene er algebra ett av flere, på mange måter atskilte, emner i matematikken. I elevenes vurdering av setningen ”Det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk” antar jeg da at de fleste tar stilling til algebraen som ett tema i faget og ikke i så stor grad betrakter algebraen som ett av fagets fundamenter. Kun 3,3 % av elevene sier seg helt enig i denne påstanden, faktisk er det 10 % som er uenig i utsagnet, mens hele 36,7 % er litt enig i at det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk og overraskende nok er nær 1/3 av elevene er usikre. Totalt gir dette ett gjennomsnitt på 3,07, elevgruppa som helhet er bare så vidt enig i at det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk, guttegruppa havner som så vidt uenig i påstanden med et snitt på 2,93, mens jentegruppa er så vidt enig i påstanden med ett snitt på 3,11. Spredningen i utvalget er relativt jevn for guttegruppa og jentegruppa og må kunne beskrives som moderat med et standardavvik på 1.05 for gruppa som helhet.

Om vi også ser på gruppas svarskår med hensyn til påstanden ”Det er viktig å bli god i algebra for å bestå eksamen”, er 1/3 av elevene i utvalget usikre på hva de mener om dette, mens godt og vell 55 % av elevene sier seg enig eller litt enig i at det er viktig å bli god i matematikk for å bestå eksamen. For elevgruppa som helhet gir dette et svarsnitt på 3,66, de er mye mer enig i dette utsagnet enn de er enig i at det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk, selv om korrelasjonen mellom påstandene er på 0,46. Det er med andre ord en tendens til at de samme elevene mener at det er viktig å bli god i algebra både med henblikk på å bli god i faget, samt for å bestå eksamen. Svarfordelingen på dette punktet reflekterer en svært eksamensfokusert motivasjon for faget og henger selvfølgelig sammen med at dette er en elevgruppe som har valgt vekk matematikk som fordypningsfag. At om lag 10 % av elevene ikke mener de må bli gode i algebra for å bestå eksamen er også interessant, spesielt siden elevenes svar på denne påstanden ikke korrelerer med poengskår på prøvedelen av undersøkelsen. Det er altså ikke slik at det er enten de faglig ”svake” eller ”sterke” som først og fremst sier seg uenig i påstanden. Igjen er det i svarfordelingen en moderat spredning i utvalget, men med en liten kjønnsforskjell med hensyn til svarskåret, der jentene er mer enig i utsagnet om algebra og eksamen, enn guttene.

Hovedtrenden er at elevene i utvalget ikke på noen måte bestrider algebraen som en sentral del av skolematematikken og vurderingsgrunnlag i faget, men at de på mange måter preges av et instrumentelt forhold til emnet. Å bli god i algebra er til eksempel viktigere for å bestå eksamen enn det tilsynelatende er for å bli god i eller forstå faget, om vi tar elevenes vurderinger, med hensyn til påstandene i undersøkelsen, på alvor. I sin vurdering av påstanden ”Det er ikke så viktig å bli god i algebra for de som ikke skal fortsette med matematikk” finner vi igjen denne faglig instrumentelle betraktningen, når elevgruppa med et svarskårsnitt på 3,36 er moderat enig i utsagnet. Fordelingen viser at kun 3,3 % av elevene i utvalget sier seg helt uenig i utsagnet, mens de resterende elevene fordeler seg nokså likt på de 4 gjenstående alternativene. Svarfordelingen på dette punktet peker på den manglende nytteverdien elevene opplever av algebraen og utgjør således en utfordring for alle som underviser i matematikk og algebra. Svarspredningen i responsen må sies å være moderat med et standardavvik på 1,16, men med et større sprik i jentenes vurdering av emnet enn guttenes. Ved denne påstanden er det guttene som er tilbøyelig til å være noe mer enig i utsagnet enn jentene. Kanskje speiler flere av disse svarene tidligere mangelfulle eller i det minste svært instrumentelt og eksamensfokuserte undervisningstimer og temaforklaringer, ansvarsfraskrivende som sådan, med hensyn til matematikkfagets pensum og dets innhold.

”Jeg har ikke bruk for å lære algebra” er en annen påstand elevene tar stilling til i undersøkelsen. Svarfordelingen på dette punktet er relativt lik svarfordelingen på forrige behandlede påstand, så elevene i undersøkelsen er som forventet ganske enig i dette utsagnet med et svargjennomsnitt på 3,32, og jentene er noe mer tilbøyelig til å være enig i utsagnet med sitt snittskår på 3,38 enn hva guttene med sitt snittskår på 3,14 er. Svarspredningen tar seg litt opp i forbindelse med den aktuelle påstanden, med et standardavvik på 1,24, dog litt lavere for guttegruppa enn for jentegruppa. Elevsvarene på dette punktet korrelerer med en koeffisient på 0,53 med påstanden behandlet i forrige avsnitt, det er da en tendens i utvalget til at det er de samme elevene som mener de ikke har bruk for algebra og at det ikke er viktig å bli god i algebra for dem som ikke fortsetter med matematikk.

Når elevene blir bedt om å vurdere utsagnet ”Det er viktig å bli god i algebra for å få en god jobb” er det ingen elever i utvalget som sier seg enig i påstanden, og kun 8,3 % som er litt enig i utsagnet. Igjen virker om lag 1/3 av utvalget usikre på om det er slik, mens bortimot 60 % oppgir å være uenig i en eller annen grad, hvorav over halve denne gruppa er klart uenig i påstanden. Gruppa som helhet er dermed unisont ganske uenig i påstanden med ett svargjennomsnitt på 2,15, og lav spredning på dette punktet i svarfordelingen. Nok en gang er det betydelig kjønnsforskjell i fordelingen, og guttenes svarskår på 1,79 viser at slik tror de ikke at det henger sammen. En svak tendens så langt i flere av svarfordelingene ser da ut til å være at guttene i større grad tenker seg at algebraens nytteverdi er begrenset og knyttet til matematikkfaget, men at i denne konteksten opplever de noe større nytteverdi av algebraen enn hva jentene oppgir at de opplever.

Elevene blir også bedt om å ta stilling til spissformuleringene ”Algebra har jeg bare bruk for i matematikktimene” og ”Algebra har lite med virkeligheten å gjøre”. Om lag 1/3 av elevene i utvalget sier seg helt enig i hver av påstandene, og enda 20 % av elevgruppa er litt enig i spissformuleringene, kun i overkant av 5 % er helt uenig i hver av de to påstandene. Elevgruppa i undersøkelsen er dermed totalt sett veldig enig i begge påstandene med et identisk svargjennomsnitt på 3,54 på begge formuleringene, og det er ingen reel kjønnsforskjell å tale om knyttet til noen av de to svarfordelingene. Det er en moderat spredning med hensyn til responsen, på begge påstander og kjønnsforskjellene med hensyn til svarskårene på disse påstandene er helt like, men ubetydelig. Interessant i denne sammenheng er at denne negative opplevelsen av emnets nytteverdi også kommer til uttrykk i svarskårene til påstanden ”Algebra er nyttig i flere skolefag”, som har en uenighetsgrad på linje med enighetsgraden i de foregående påstandene, og dermed et ett svargjennomsnitt på 2,47. Gruppa, på tross av en viss spredning i svarene, stiller seg ganske negative med hensyn til betraktninger omkring emnets nytteverdi i andre skolefag, men påfallende er det at guttene med sitt svargjennomsnitt på 2,29 er mer uenig i at algebra er nyttig i andre skolefag, enn det jentene med sitt snitt på 2,52 er. Igjen ser vi at guttene i ennå litt større grad enn jentene begrenser algebraens eventuelle nytteverdi til å gjelde matematikkfaget. Det er verdt å undre seg over årsaken til denne tendensen, kanskje ligger noe av forklaringen i at jentene i større grad pliktskyldig er positive og medgjørlige til alt lærere har gitt uttrykk for, mens guttene ikke er like opptatt av å gjøre alt ”rett” og i større grad har sin egen erfaring som utgangspunkt? Elevgruppas respons på dette punktet har en svak korrelasjon på 0,2 med deres poengskår på undersøkelsens prøvedel, og viser at elever med høyt prøveskår har en liten tendens til å være mer enig i at algebraen har nytte også i andre skolefag, enn hva ”svakere” elever har.

En kan spekulere i hva som skaper denne opplevelsen av at algebra har elevene ikke bruk for med hensyn til de 3 påstandene, kanskje innbyr spissformuleringene til ”å smøre tjukt på”, men i så fall kunne en kanskje vente ett mer positivt svar på påstanden omkring algebraens nytte i andre skolefag. Om en skal forsøke å oppsummere elevenes opplevelse av emnets nytte vil en kunne si at de i liten grad opplever at algebra har noen nyttefunksjon utenfor matematikktimene og pensum, og at de ikke nødvendigvis er overbevist om algebraens nyttige rolle innenfor matematikkfaget, men har akseptert at algebraen er en del av faget en må mestre for å mestre faget. Kanskje innebærer de negative holdningene til emnets nytteverdi en slags protest mot pensum og ”det lange skoleløpet”.

I KIM - prosjektet fant (Streitlien, Wiik, Brekke, 2001) forskerne ut at elevene i stor grad oppga at de anså matematikkfaget for å være nyttig for dem både med hensyn på skolegang og livet, selv om denne nytteopplevelsen sank noe fra 6. til 9. klassetrinn. Elevenes vurdering av algebraen som forholdsvis unyttig for dem, er derfor på en måte overraskende, selv om en her må ha i mente at utvalget er den delen av elevene som på sett og vis har definert matematikken ut av sitt fremtidige utdanningsløp og karriere. Elevenes vurderinger av vanskelighetsgraden samt egen forståelse kan kanskje gi håp om at opplevelsen kan snu og at nytteopplevelsen ikke behøver å være fult så fraværende som svarene i denne undersøkelsen gir uttrykk for, samtidig som disse negative holdningene utgjør et betydelig hinder på vegen i den obligatoriske matematikkundervisningen, elevene tross alt skal gjennom. Hvorvidt de negative holdningene bare gjelder algebraens nytteverdi eller er noe som knyttes til hele matematikkfaget ville vært interessant å studere, men på dette punktet gir ikke denne studien noen klare svar.

Fremtidsplaner og interesse for algebra.

For å betrakte elevenes tanker omkring algebra og deres egen fremtid vil jeg først og fremst se på svarfordelingen med hensyn til utsagnene ”Jeg ønsker meg et yrke der jeg får bruke algebra” og ”Mine foreldre bruker ikke algebra i sine yrker eller sin hverdag”.

Det er i påstanden ”Jeg ønsker meg et yrke der jeg får bruke algebra” at vi finner den største graden av uenighet med utsagnet, hele 73,3 % er helt uenig i påstanden, og ytterligere 13,3 % er litt uenig. Dette gir totalt sett den aller laveste poengskåren i denne delen av undersøkelsen, med snittverdien 1,44, samt den laveste spredningen, standardavvik på 0,88, med hensyn på elevresponsen. Av alle påstandene i denne bolken er det dette elevene er mest uenig i og det er ingen reel kjønnsforskjellen å spore i svarfordelingen. En jobb der en bruker algebra ønsker de seg virkelig ikke.

Det utsagnet som har den mest tydelige skår med tanke på graden av enighet med utsagnet er ”Mine foreldre bruker ikke algebra i sine yrker eller sin hverdag”, et utsagn som om lag 50 % av eleven er helt eller litt enig i. Gjennomsnittsverdien for gruppen som helhet er på 3,76, for jentene 3,87, mens guttenes verdi er 3,42. Som gruppe er elevene svært enig i at deres foreldre ikke bruker algebra i sin hverdag eller sine yrker, selv om guttene tror foreldrene bruker algebra i noe større grad enn hva jentene tror og i tillegg svarer mindre spredt på påstanden.

Om en beregner korrelasjonen mellom elevene svar på disse to variablene, knyttet til eget yrkesvalg og foreldres yrke, finner vi en svak, men negativ effekt 0,16. Tendensen er at uenighet til det første utsagnet om å få seg et yrke der en bruker algebra, henger svakt sammen med elevens oppfatning om foreldres bruk av algebra i yrkeslivet. Sagt tydeligere; ønsker eleven ikke en jobb med algebrabruk, så er det litt større sjanse for at eleven ikke tror foreldrene bruker dette i jobben. Nå har selvfølgelig ikke disse elevene noen fullstendig oversikt over hvilke yrker som kan sies å jobbe med algebra på et eller annet nivå, så deres antagelser om foreldres og eget yrkesliv trenger ikke å stemme med de faktiske forhold. Funnene her henger for øvrig greit sammen med at den samme elevgruppa oppgir at det ikke er så viktig å bli god i algebra med tanke på å få seg en god jobb og at de opplever at algebra har lite med virkeligheten å gjøre.

Påstander om hva som er viktig for å lære algebra

Den neste siden i undersøkelsen ber elevene ta stilling til en liste over forslag om hva som er viktig for læring av algebra. Igjen velger elevene å si seg enten helt enig, litt enig, usikker, litt uenig eller helt uenig i påstanden, og svarene vektes med verdier fra 5 til 1. Den samme eleven som hoppet bukk over alle spørsmål i forrige avsnitt, har heller ikke her svart på noen spørsmål. Elevenes respons på påstandene ga følgende svarfordeling.

Når en skal lære algebra er det viktig:	Prosentvise andel som svarer					
	Helt enig	Litt enig	Usikker	Litt uenig	Helt uenig	Sum
Å lære regler	73,3	18,3	5	0	1,7	98,3
Å gruble over problemer	21,7	43,3	30	0	3,3	98,3
Å jobbe med oppgaver	63,3	30	3,3	0	1,7	98,3
Å lære løsningsmetoder	71,7	21,7	3,3	0	1,7	98,4
Å jobbe med læreboka	45	31,7	16,7	5	0	98,4
Å få forklart ulike elevers løsning av problemer	26,7	28,3	20	20	0	95
Å gjøre lekser	40	30	11,7	11,7	5	98,4
Med tavleundervisning og klassesamtale	46,7	35	11,7	1,7	3,3	98,4
Å ha medfødt evner	15	16,7	25	15	25	96,7
Å bruke logikk	33,3	36,7	25	1,7	1,7	98,4

Figur 9,4: Svarfordeling på påstander i punkt 2 studiens 1 del.

I registreringen og analysen av svarene i undersøkelsen var det slående hvor likt mange elever hadde krysset ut i denne delen av undersøkelsen, hvor like mange av fordelingene var, og verdt å merke seg at på mange av påstandene, hadde bortimot ingen gjort bruk av avkryssingsmulighetene for litt eller helt uenig. De ujevne svarfordelingene ga opphav til høye gjennomsnittsskår og like og lave standardavvik for de fleste av disse punktene. Oppsummert kan man si: På de fleste påstandene er elevene her skjønt enig i at det er slik man lærer algebra.

Slik er den gjennomsnittlige svarfordelingen med hensyn til hva elevene betrakter som viktig i algebrainnlæring.

Når en skal lære algebra er det viktig:	Svargjennomsnitt			Standardavvik		
	alle	gutter	jenter	alle	gutter	jenter
Å lære regler	**4,64**	**4,86**	**4,58**	**0,74**	**0,36**	**0,81**
Å gruble over problemer	**3,81**	**4,00**	**3,76**	**0,90**	**0,68**	**0,96**
Å jobbe med oppgaver	**4,56**	**4,36**	**4,62**	**0,73**	**0,63**	**0,75**
Å lære løsningsmetoder	**4,64**	**4,71**	**4,62**	**0,71**	**0,47**	**0,78**
Å jobbe med læreboka	**4,19**	**3,86**	**4,29**	**0,90**	**0,95**	**0,87**
Å få forklart ulike elevers løsning av problemer	**3,65**	**3,43**	**3,72**	**1,11**	**1,22**	**1,08**
Å gjøre lekser	**3,90**	**3,71**	**3,96**	**1,21**	**1,27**	**1,21**
Med tavleundervisning og klassesamtale	**4,22**	**4,36**	**4,18**	**0,97**	**0,74**	**1,03**
Å ha medfødt evner	**2,81**	**2,23**	**2,98**	**1,41**	**1,42**	**1,37**
Å bruke logikk	**4,00**	**4,14**	**3,96**	**0,91**	**0,86**	**0,93**

Figur 9,5: Gjennomsnittlig svarfordeling på påstander i punkt 2 studiens 1 del.

Som leseren selv kan se rangerer majoriteten av elevene det å lære regneregler, jobbe med oppgaver og lære løsningsmetoder som avgjørende og det viktigste for læring av algebra, både når en betrakter prosentfaktoren som sier seg enig i at dette er viktig og når en ser på gjennomsnittet for svarfordelingen. Guttene antar i ennå større grad enn jentene at å lære regler og løsningsmetoder er avgjørende for algebralæringen, her svarer de svært samlet med et standardavvik på omkring 0,4, mens jentene satser i større grad på oppgaveløsning. En kan spørre seg i hvor stor grad svarfordelingen her skyldes erfart praksis, erfaring av at det er slik en lærer, manglende erfaring av noe annet eller bevisst tenkning omkring egen læring. Det er rimelig å anta at svarene ikke er helt på kollisjonskurs med den matematikkopplæring og algebraundervisning elevene har hatt tidligere og da speiler svarene en forholdsvis individorientert, beregningsfokusert eller prosedyreorientert oppfatning omkring algebralæring, selv om ulike oppgaver jo kan ta tak i både prosedyremessige og strukturelle aspekter av algebraen, er det ikke helt usannsynlig at dette på mange måter speiler den skolehverdagen elevene har opplevd. Klasserommene rundt omkring er kanskje for individualistisk og tradisjonelt orientert i sitt arbeid med dette temaet.

Etter disse faktorene velger elevene tavleundervisning og klassesamtale, samt jobbing med læreboka som viktige kilder til læring i algebra. For begge disse alternativene er det stor enighet omkring deres betydning for algebralæringen, men mens guttene viser langt større tro på tavleundervisning og klassesamtale, enn på jobbing med læreboka, er jentene enig i at de to alternativene er omtrent like viktige for læringsprosessen. Guttene i utvalget ser dermed ut til og foretrekker mer retoriske tilnærminger til algebraemnet.

Elevene som gruppe rangerer det å bruke logikk, med et snitt på 4,00, samt å gruble over problemer med et snitt på 3,81, som noenlunde likne viktige for læringsprosessen i algebra. Verdt å merke seg med hensyn til begge disse alternativene er at guttene vurderer dem begge som litt mer viktig enn hva jentene i utvalget gjør. Jentene på sin side vurderer det å gjøre lekser som omtrent like viktig som det å bruke logikk for å lære noe i emnet, men slik vurderer ikke guttene det. Leksepåstanden er for øvrig en av de få der en kan spore en viss spredning i utvalgsresponsen i denne bolken. I påstandene over ser en her en tendens til at guttene favoriserer tenking og samtale, som innlæringsstrategi i emnet i noe større grad enn jentene, mens jentene på sin side oppvurderer ”hard” arbeid med oppgaveløsning, arbeid med lekser og arbeid med læreboka i forhold til guttenes vurdering i svarene. Jentene i utvalget synes å ha en større tiltro til at flid og prosedyrer er veien til å lære, mens guttene i utvalget synes å tenke seg at refleksjon, kanskje det jeg ville tenke på som å utvikle strukturell forståelse, i større grad er viktig for læringsprosessen. Kjønnsforskjellen med hensyn til tanker om algebralæringen er interessant, kan man kanskje spore en tendens til at guttene på en måte har et mer konstruktivistisk læringssyn, mens jentene ligger nærere et behavioristisk læringssyn i sin tilnærming til effektive læringsmetoder i matematikken? Noen markant forskjell er det nok ikke, men guttenes noe større fokus på grubling og refleksjon kan kanskje også betraktes som et utslag av tro noe mer problemfokusering i innlæringsfasen. Det får meg uansett til å undres om det ikke er denne biten som utgjør den lille forskjellen med hensyn til hvordan gruppene her skårer på oppgavene i undersøkelsen.

Blant de faktorene som elevene ikke vektlegger som viktig i så stor grad for læringsutbyttet er det å få forklart ulike elevers løsning av problemer, dette er det om lag 20 % av elevene som faktisk er litt uenig i at er vesentlig for algebralæringen. Svarfordelingen med hensyn til påstanden har en moderat spredning og kjønnsdifferanse, guttene har mindre tro på dette enn hva jentene har, men det er ingen elever som krysset av for å være helt uenig i at det å få forklart ulike elevers løsning av problemer er en veg til læring av algebra. Noen store sosialkonstruktivister synes utvalget ikke å inneholde.

Verdt å merke seg er at for alle de påstandene jeg nå har sett på, finner jeg en lav negativ korrelasjonskoeffisient på omkring 0,1, når jeg holder elevenes svar på en påstand opp imot deres eget skår på prøvedelen av undersøkelsen. Det er altså en svak tendens til at elever med lavt prøveskår er noe mer enig i hver enkelt påstand enn elever høyere prøveskår. Sammenhengene er som nevnt små, men en kan tenke seg at elever som skårer relativt sett dårligere her finner en lang liste over ”skulle ha gjort mer av” uten å vurdere hva som ville komme til å gi resultater og for noen av dem ville sikkert, bare litt mer innsatts eller bruk av et eller annet område, også kunne komme til å gi resultater.

Av alle påstandene i denne bolken er det bare et som utvalget er klart uenig i og det er dette at elevene som gruppe er klart uenig i at medfødte evner har noe å si for læringen av algebra. Spørsmålet er også den påstanden som klarest er delt i svarfordelingen med standardavvik på 1,41, og omtrent like mye spreding i guttegruppa og jentegruppa sine svar. I registreringen fant jeg at elevene fordelte seg i 5 nesten like store grupper med hensyn til hva de mener omkring påstanden, og det er bare i forbindelse med denne påstanden at vi finner en gruppe av elever som er helt uenig i utsagnet, i denne bolken av undersøkelsen. Kjønnsfordelingen med hensyn til denne enkeltpåstanden er også betydelig, jentene er som gruppe mye mer usikker på om medfødte evner har noe betydning, mens guttene gir klart uttrykk for at en slik sammenheng har de ikke tro på. Når en sjekker for korrelasjon med poengskåret på undersøkelsens prøvedel finner jeg at det er en negativ korrelasjon på 0,3 med prøveskår og graden av enighet omkring at medfødte evner er avgjørende for utviklingen i algebra. Det er altså en svak tendens til at elever som oppnår gode resultater på ”prøven” er uenig i postulatet og at elever som oppnår dårlige resultater er enig i utsagnet.

Hvilke andre deler av matematikken henger sammen med algebra?

I denne delen av undersøkelsen kunne elevene sett flere kryss for å si noe om hvilke andre deler av faget de forbinder med algebra. På forhånd fryktet jeg at mange elever ikke ville ha noe forhold til flere av begrepene eller ikke huske betydningen til hvert begrep, og ikke forbinde det med et emneområde i faget. I gjennomføringen av undersøkelsen viste det seg ikke å være noe problem, i den forstand at nesten ingen elever spurte om betydningen av noen av disse begrepene, uten at det betyr at jeg tar for gitt at alle elever hadde noen god forståelse av alle begrepene. 3 elever valgte ikke å krysse av for noe emne i denne delen av undersøkelsen, så i all hovedsak valgte elevene noen alternativer, mer eller mindre bevisst.

Hvilke emne(r) mener elevene at algebraen er nærest tilknyttet	**Antall alle**	**Antall gutter**	**Antall jenter**
Geometri	**7**	**1**	**6**
Funksjoner	**16**	**6**	**10**
Bevis	**6**	**2**	**4**
Problemløsning	**34**	**9**	**25**
Å beskrive problemer	**15**	**4**	**11**
Likninger	**44**	**9**	**35**
Regneregler	**24**	**8**	**16**
Annet	**2**	**2**	**0**

Figur 9,6: Svarfrekvens til undersøkelsens punkt 3 i undersøkelsens del 1.

Når elevene blir bedt om å velge hvilke andre deler av matematikken som er nærest tilknyttet algebraen er det uten tvil likninger som flest elever oppgir som svar, tett fulgt av problemløsning og deretter regneregler. Denne veldig klare tilknytningen til likninger er kanskje litt uventet sett opp imot dagens læreverk, som i hvert fall for 8.trinn i stor grad har valgt å behandle temaet likninger i egne kapitler og ikke klassifisert som algebra. Et moment som kanskje kan spille inn her er at ikke alle elevene i utvalget er blitt undervist etter de aller nyeste læreverkene i sine år på ungdomstrinnet. Kanskje er det kun i likningsløsning at elevene føler at bokstavbruken er relevant, eller henger dette kanskje sammen med elevenes svar i forrige bolk omkring hvordan man lærer algebra, der regneregler og løsningsmetoder var populærere svaralternativer. I likningsløsning har selvfølgelig elevene trent mye på løsningsmetoder og de forbinder kanskje disse i like stor grad med algebra som med likninger.

Å knytte algebraen i større grad opp mot problemene og deres løsning har jo vært et matematikkdidaktisk råd så vel som et politisk valg med hensyn på læreplaner de siste 30 årene, så denne vurderingen fra elevenes side er vel ingen overraskelse. At eleven i mye mindre grad opplever at algebraen beskriver problemer er kanskje mer overraskende sammenholdt med det fokuset som har vært på mer retoriske tilnærminger og det å gå fra problem til algebrauttrykk i senere læreverk og læreplaner. Å modellere problemer ved hjelp av formell algebra er elevene tydelig ikke så fortrolige med, kanskje skyldes dette at de ikke opplever at det er det de gjør når de for eksempel blir bedt om å komme med et passende uttrykk til en matematisk problemsituasjon, eller kanskje opplever de ikke oppgaven som et reelt problem, men mer som en skolematematikkoppgave eller kanskje har ikke elevene klart for seg hva som ligger i utsagnet, "å beskrive problemer", i matematikkfaget.

At såpass få elever forbinder algebra med geometri er litt underlig når jeg nettopp har sett på hvor sentral geometrien er i mange av lærebøkenes algebrainnføring i dag, men kanskje behandler de samme lærebøkene temaet ganske annerledes på senere trinn på ungdomsskolen, enn hva tilfellet er i bøkene for 8. trinn og kanskje ble temaene ikke knyttet så sterkt sammen i mange læreverk brukt på ungdomstrinnet tidligere da en del av disse elevene gikk på ungdomsskolen. At funksjoner ikke knyttes nærere opp imot algebraen er for så vidt ingen overraskelse da det skilles klarer ut som eget tema i de fleste nyere læreverk, men siden variabelbruken så tydelig preger arbeidet med funksjoner er det allikevel verdt å legge merke til.

At elevene i så liten grad forbinder algebraen med bevis er på en måte litt underlig så mye vekt på generalisering som det er i nyere læreplaner og lærebøker, men på den andre siden er selve beviset gjerne fraværende også i de nyere læreverkene, så resultatet er allikevel ikke helt overraskende.

Når jeg ser på ulikheter med hensyn til kjønn i valg av fremstillingsform, oppdager jeg at guttene som utgjør ¼ av utvalget, kun utgjør 1/7 av gruppa som forbinder algebra nært med geometri, og omlag 20 % av gruppa som forbinder algebra med likninger, mens de utgjør 1/3 av gruppene som forbinder algebra med regneregler og bevis, og 3/8 av gruppa som forbinder algebra med funksjoner. I utvalget kan en da se en liten tendens til at jenter i noe større grad enn gutter forbinder algebra med geometri og likninger, mens gutter i noe større grad enn jenter forbinder algebra med funksjoner, bevis og regneregler.

Når jeg holder elever poengskår på undersøkelsens prøvedel opp imot valg av tema en forbinder algebra med, finner jeg at elever som forbinder algebra med funksjoner skårer i snitt noe bedre (15,1 poeng), enn elever som forbinder algebra med geometri (12 poeng). For de øvrige emnene er det liten forskjell på snittskåret og elevgruppens totale gjennomsnitt.

Sammenhengen er pussig, kanskje ikke spesielt det at de elevene som forbinder algebra med funksjoner skårer relativt sett bedre, men det at elever som forbinder algebra med geometri skårer dårligere. Med tanke på hvor sentral geometrien er i dagens lærebøkers innføring i algebra er dette en tankevekker, men kanskje er det kjønn som mer en geometritilknytningen kan forklare denne tendensen eller kanskje henger det hele sammen med at de aktuelle elevene aldri er kommet ”forbi” algebraintroduksjonen i sitt ”forhold til algebra”. Slik forstått at deres ”utvikling i algebra” har strandet med å kunne mestre å bruke bokstavsymboler som forkortelse for ulike geometriske størrelser eller variabelbruk kun i nær tilknytning til den konkrete geometriske situasjonen. Uavhengig av konklusjon på dette spørsmålet påpeker det behovet for tydelig algebrainnføring der elever opplever variabelbruk i ulike sammenhenger og gjøres oppmerksom på bokstavvariabelens ulike roller.

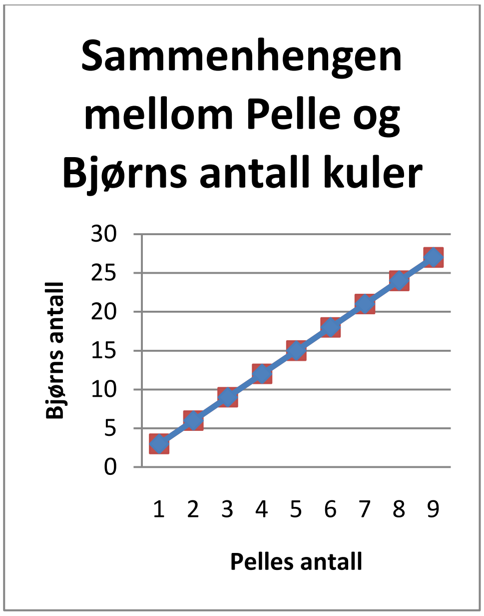
Ulike fremstillinger av en matematisk sammenheng.

Den siste bolken i del 1 av undersøkelsen tar for seg hvordan elevene i utvalget foretrekker å få informasjon presentert, på hvilken presentasjonsform de lettest forstår en matematisk sammenheng. Et eksempel, en funksjon, sammenhengen mellom Pelles og Bjørns kuler blir presentert for elevene på fire ulike måter og elevene blir bedt om å krysse av for det de synes er den beste fremstillingsmetoden, samt forklare hvorfor de foretrekker nettopp denne fremstillingen av informasjonen. De alternative fremstillingene i undersøkelsen er en retorisk fremstilling, algebrauttrykk, tabellfremstilling og grafisk vist sammenheng. Elevene velger mellom følgende utsagn:

- a) Bjørn har tre ganger så mange kuler som Pelle
- b) Om B = Bjørns antall kuler, P = Pelles antall kuler, da er: B = 3 • P.
- c)

Bjørns antall kuler	3	6	9	12	15	18	21	24	27
Pelles antall kuler	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- d)



De fleste elevene oppfattet hva som var forventet at de skulle gjøre og krysset av for ett alternativ, mens et lite fåtall elever hoppet over denne delen av undersøkelsen, ett par andre satt mer enn ett kryss, mens atter ett par "ringet" rundt første kolonne med tall i tabellen, og forklarte at det er dette som er det korrekte svaret på oppgaven. Elevenes valg med hensyn til fremstillingsform fordelte seg slik;

Ta stilling til ulike fremstillinger	Antall elever som har valgt		
	alle	jenter	gutter
En matematisk sammenheng beskrevet i ord.	17	16	1
Sammenhengen beskrevet i algebrauttrykk.	12	7	5
Sammenhengen fremstilt i tabell.	26	19	7
Grafisk fremstilling av sammenhengen.	3	1	2

Figur 9,7: Frekvensfordeling for svar med hensyn til punkt 4 i undersøkelsens 1 d.

Av de 60 elevene i utvalget foretrekker bortimot halvparten, hele 26 elever tabellfremstillingen av sammenhengen, typiske begrunnelser de gir for fremstillingsvalget er at på denne formen er det oversiktlig, lett å se hva slags sammenheng det er og å lese av, andre argumenterer med at "det er tabell som er enklest" og her kan man "med egne øyne se sammenhengen". Framstillingen virker å være omtrent like populær hos begge kjønn, da kjønnsskjevheten i antall som har valgt denne fremstillingsmåten ikke er så langt unna kjønnsskjevheten i utvalget. Elevgruppa som velger tabellfremstilling som sin foretrukne fremstilling skårer noe lavere i snitt, 13,5 poeng, enn hva gjennomsnittet for hele fordelingen er, 14 poeng. Det å forholde seg til informasjonen som konkrete tallpar ser da ut til å henge sammen med dårligere utviklet algebraforståelse på en eller annen måte, kanskje er det slik at fokuset på den generelle sammenhengen er mindre for elever som forholder seg til algebraiske sammenhenger på denne måten

Hele 17 elever oppgir at de foretrekker å få opplysningene gitt beskrevet med vanlig språk, forklaringene denne gang knytter seg gjerne til at dette er enklest, minst avanserte og lettest å forstå, og at her er det brukt ”vanlig norsk” og ikke tall som en elev påpeker. En elev argumenterer med at da behøver hun ikke å tenke så mye, en annen forklarer at det bare er denne fremstillingen hun forstår, mens atter en annen elev foretrekker den muntlige fremstillingen fordi denne gjør sammenhengen klar ”svart på hvitt”. Verdt å merke seg er det at gruppen som har valgt denne fremstilling nærmest er en ren jentegruppe, det er kun 1 gutt som har krysset av for dette svaralternativet. Kanskje opplever jentene språket som sin arena i større grad enn de opplever matematikken som sin arena, enten på grunn av for lav matematikkfaglig selvtillit eller på grunn av en noe høyere norskfaglig selvtillit enn hva guttene har.

Overraskende nok, på bakgrunn av elevenes egne utsagn om manglende nytteverdi av algebraen, oppgir en del elever også at de liker den algebraiske varianten på informasjonen best, med typiske begrunnelser som at her er det både forklaring og formel, sammenhengen er forklart enkelt og greit. Omtrent like mange gutter og jenter valgte denne fremstillingen, noe som viser at den er mer populær i guttegruppa i utvalget enn i jentegruppa siden guttegruppa kun utgjør ¼ av det totale utvalget. Dette passer igjen med utvalgsguttenes tendens til i større grad enn jentene, å vurdere algebraen som funksjonell i matematikken, som vi så tidligere i denne studien. Nå behøver jo ikke elevenes svar på undersøkelsen alltid å gi noe godt bilde av hva de faktisk foretrekker, illustrert ved at en av guttene som valgte denne fremstillingen, fortvilet forklarte seg slik ”må jeg velge så blir det denne, men ærlig talt skjønte jeg ikke no` av denne måten heller”. Kanskje er det også slik at noen av elevene tror dette er det ”riktige” svaret, siden undersøkelsen dreier seg om algebra og dette alternativet er tydeligst ”algebraisk” i sin form, i den forstand at det tar i bruk formelle algebraiske symboler.

Av elevgruppa på 60 er det kun 3 elever som foretrekker informasjonen gitt som en graf, og disse 3 elevene har et høyere gjennomsnittsskår på prøvedelen av undersøkelsen enn majoriteten, samtidig som en av disse 3 elevene også krysset av på tabellfremstilling av sammenhengen, mens han påpekte at begge disse fremstillingene var enkle å forholde seg til og lett å trekke informasjon ut av. En elev påpeker at det er vanskelig å begrunne valget, men at ”alle kan jo forstå” grafisk fremstilling av en sammenheng og at det går raskt å trekke ut den informasjonen en er på jakt etter i en slik fremstilling. At det er flere gutter enn jenter som foretrekker grafisk fremstilling er verdt å merke seg, særlig med tanke på utvalgets sammensetning, selv om en bør ha i minne at et antall på 3 personer er lavt med hensyn til å trekke ut noe kjønnsrelevant informasjon.

Hvordan tenker elevene i algebra?

I undersøkelsens andre del møter elevene som sagt oppgaver som skal teste elevenes kunnskaper og forståelse i algebra, og avsløre eventuelle misoppfatninger eller mangelfulle forestillinger i emnet. Oppgavene spenner over ulike aspekter av algebraen, dog med færre prosedyreorienterte oppgaver, enn hva det ordinære KIM -prosjektet (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000) inneholdt. Det er som tidligere nevnt ventet at elevene skal gjøre en del feil i oppgaveløsningen, selv om dagens lærebøker og læreplaner forsøker å legge opp til ordbruk, faglig progresjon og pensumgjennomgang som skal luke vekk eller hindre utviklingen av kjente misoppfatninger i faget.

Elevene i utvalget er intet unntak fra forventningen, gruppa som helhet gjør mange feil og det tydeliggjøres flere kjente misoppfatninger i svarene deres. Jeg vil nå se nærmere på svarfordelingen og ulike feilsvar, samt begrunnelser for disse elevene gir. Jeg vil i analysen kommentere ulikheter mellom kjønnene og klassenivå der jeg finner det, men ikke gå inn på disse variablene dersom den statistiske behandlingen ikke viser noen ulikhet på bakgrunn av dem.

Innledning til algebra

Noen av oppgavene i undersøkelsen tar for seg matematikk som ikke klart defineres som algebra, men som omhandler emner der misoppfatninger eller usikkerhet i dette området kan få følger for læringen i algebra. Temaet som gjerne tas opp tidlig i lærerbøkenes gjennomgang av algebra, dreier seg gjerne om prioriteringsregler knyttet til de 4 regnearter. Andre oppgaver ser igjen på situasjoner der det symbolske algebraverktøyet enkelt kan løse problemet, mens jeg i undersøkelsen vil betrakte hvilke metoder elevene foretrekker i sin behandling av problemsituasjonen.

Prioritering mellom regneoperasjoner.

Den første oppgaven i oppgavesettet tar i bruk de tidligere omtalte prealgebraiske boksene og det er meningen at elevene skal identifisere en ukjent uten at oppgaven innfører noe symbol for den ukjente variabelen. Oppgaven tester prosedyremessige kunnskaper i aritmetikken og er tatt med i oppgavesettet for å gi elevene en myk start på testen, og som forventet var det høy løsningsfrekvens på i hvert fall 2 av 3 deloppgaver i denne oppgaven.

Oppgave 1

a) $3 \bullet \square = 21$

b) $\square \bullet 2 + 4 = 12$

c) $25 - 2 \bullet \square = 17$

Oppgavelyd i undersøkelsens første oppgave.

Type svar	Prosentvis andel svar på hver av oppgavene		
	1a	1b	1c
Rette svar	96,7	83,3	53,3
Ubesvart	1,7	3,3	28,3
Gale svar	1,7	13,3	18,3

Figur 9,8: Svarfordeling i prosent på oppgave 1del 2.

På oppgave 1a kom bortimot alle elever i utvalget fram til det korrekte svaret, 1 elev tok trolig litt lett på hoderegningen og oppga 8 som sitt svar, mens den siste eleven i utvalget hoppet over oppgaven.

I oppgave 1b var svarprosenten for korrekte svar redusert til om lag 83 % og i oppgave 1c til ca: 53 %. Typiske feilsvar elevene oppgir i denne delen av undersøkelsen er for;

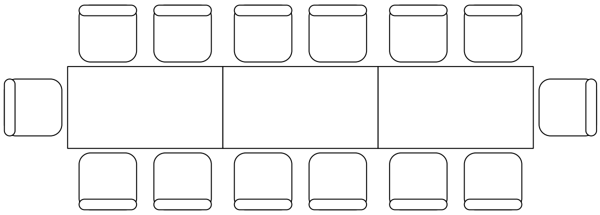
- oppgave b, 2. Som fremkommer dersom man utfører addisjonen før multiplikasjonen.
- oppgave c, 0,74, som nok er en avrunding av 17/23. Igjen et resultat man kommer frem til ved gal prioritering av rekkefølge, denne gangen subtraksjon før multiplikasjon.

En del elever bommer altså på regnerekkefølgen i begge stykkene, og dette skyldes gjerne at de utfører addisjon før multiplikasjon eller subtraksjon før multiplikasjon. Legg merke til at særlig mange elever begår denne feilen når multiplikasjonen er lagt sist i oppgaven, med hensyn til leserekkefølgen.

Funnene i utvalget stemmer godt overrens med funnene i KIM - undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000) som avdekket omfanget av slike misoppfatninger i grunnskolen. Utvalgsgruppen kommer litt dårligligere ut med hensyn til prosentandelen korrekte svar i 1b, enn hva funnet i grunnskolens 10. trinn var i det nasjonale prosjektet, mens for 1c er tendensen det motsatte. De typiske feilsvarene funnet i min undersøkelse er de samme, som i det omtalte KIM - prosjektet. For mitt utvalg av elever fra videregående opplæring, som også for mange grunnskoleelever, er prioriteringsrekkefølgen, deler av aritmetikkens prosedyrer, tydeligvis en utfordring og da særlig i oppgaver som bryter den tradisjonelle leserekkefølgen.

Tallmønstre

I oppgave 2 blir elevene utfordret på å finne antall stoler en trenger når en bygger et langbord av småbord i følgende mønster. Oppgaven tester i liten grad prosedyremessige ferdigheter, men er mer en øvelse i å se relasjonen mellom figur, opplysninger og egnet metode. Oppgaven ble illustrert av følgende figur i oppgavesettet:



Elevene blir først bedt å finne antall stoler dersom langbordet består av 4 småbord og deretter om å finne stolantallet ved 25 småbord, samt å forklare hvordan de kom fram til svaret i b. Alle elevene i utvalget har forsøkt å løse oppgaven, selvfølgelig med vekslende hell. Jeg vil nå først presentere en tabelloversikt over resultatene i min undersøkelse, for så etter hvert å sammenlikne med KIM – studiens funn i sin undersøkelse av landets 10.klassinger.

Ulike svaralternativer	Andel ulike svar ved 4 småbord	Ulike svaralternativer	Andel ulike svar ved 25 småbord
Rette svar	61,7	Rette svar	41,7
Ubesvart	0	Ubesvart	1,7
Sum ulike gale svar	38,3	Sum ulike gale svar	56,7
De ulike feilsvarene		De ulike feilsvarene	
24	20	100	10
16	5	110	3,3
17, 19	3,3	125	3,3
20	1,7	150	25
Andre svar	8,3	Andre svar	15

Figur 9,9: Svarfordeling i prosent på oppgave 2a og 2b i undersøkelsens del 2.

Mens omtrent 62 % av elevene i utvalget finner det korrekte antall stoler ved 4 bord, så klarer kun 25 av de 60 elevene, om lag 42 %, å løse oppgaven korrekt når det dreier seg om et så stort antall bord som 25. 96 % av de elevene som kommer fram til det korrekte svaret 102 stoler i utfordringen ved 25 småbord har også det korrekte svaret på første del av denne oppgaven. Flertallet av disse elevene skriver gode forklaringer på hvordan de kommer frem til svaret og har tydelig forstått oppgaven. Andelen med korrekte svar i dette utvalget er således noe lavere enn i Kim-studien, der løsningsprosenten, som leseren selv kan se, på a var 81 % og på b var 67 %.

Oppgave 2a – prosentandel som svarer:		**Oppgave 2b – prosentandel som svarer:**	
Ubesvart	**1**	**Ubesvart**	**6**
18 – rett svar	**81**	**102 – rett svar**	**67**
16	**2**	**100**	**2**
17el. 19	**3**	**110**	**2**
20	**2**	**125**	**2**
24	**7**	**150**	**11**
Annet	**3**	**annet**	**10**
Sum	**99**		**100**

Figur 9,10: Resultatene fra tilsvarende oppgave i KIM -studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000).

En kan spørre seg hva som er årsaken til at elevene i min studie har en noe lavere løsningsfrekvens enn hva denne KIM -studien, fant. Aktuelle forklaringer og årsaker her, kan som tidligere nevnt kanskje være det skjeve elevutvalget eller at en del av elevene har hatt ett opphold fra matematikkens verden på noen år. Kim-tallene er forøvrig som leseren selv kan se, ikke helt nye, og andre nyere matematikkstudier som blant annet Pisa (Kjernsli, Lie, Olsen, Roe, 2007), viser en generell tilbakegang i matematikkunnskapen for elever i grunnskolen fra den gang til nå, og dersom vi antar at dette også gjelder algebra, kan denne trenden kanskje være medvirkende til at elevene i utvalget skårer lavere enn grunnskoleelevene i KIM – studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000). På den andre siden er elevene i denne undersøkelsen noe eldre enn elevene i den nasjonale undersøkelsen, noe en kunne tenke seg skulle øke deres sjanser for å kunne løse en del av oppgavene i studien.

Feilsvaret 100 i b-oppgaven, er bemerkelsesverdig populært blant elevene i mitt utvalg, mer enn hva KIM - prosjektet fant i grunnskolens 10. trinn (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000). Mange av mine elever har tydelig valgt strategien å multiplisere 4 og 25, kanskje uten å lese undersøkelsespapirene så veldig nøye. Blant de som svarer korrekt på antall stoler ved 4 småbord, men som ikke finner frem til at ved 25 småbord er antall stoler 102, svarer flere med tall omkring 100 eller 102, i hvert fall 99, 95, 88, 100, 101 og 108 er det elever som responderer. Hos flere elever som svarer med tall omkring 100 er undersøkelsespapirene illustrert med ett forsøk på å tegne begge de omtalte situasjonene, og dette tegnforsøket er ikke overraskende blitt mer vellykket når en skal tegne 4 enn 25 småbord. Det er tydelig av undersøkelsespapirene at flere andre elever også forsøker å telle seg frem til oppgavesvarene, men at en del elever bommer på begge oppgaven og svarer med tall som ligger omkring 18 på spørsmål a og omkring 102 på spørsmål b.

12 elever tar tydeligvis ikke innover seg den tegnede illustrasjonen, men finner at en kan plassere 6 stoler omkring ett bord, en tenkning som gir at 4 småbord gir 24 stoler, 11 av disse elevene svarer igjen at 25 småbord gir 150 stoler. Elevene i denne gruppen ignorerer den tegnede illustrasjonen i den forstand at de enten ser for seg mange småbord, eller de overser at det jo ikke kan plasseres 6 stoler omkring hvert av de 3 småbordene på tegningen i undersøkelsen. Disse typiske feilsvarene er betraktelig mer populære i mitt utvalg enn blant de 10. klassinger i grunnskolen som deltok i KIM - studien(Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), noe som selvfølgelig henger sammen med lavere løsningsfrekvens for oppgaven.

Noen av de elevene som kommer frem til korrekt svar med 18 stoler til 4 bord, samt noen av de som ikke fikk første oppgave, forandrer tydeligvis strategi for å løse utfordringen med 25 småbord, og faller ned på nye strategier om å multiplisere antall småbord med 5 eller 6 for å finne antall stoler som kreves.

Vanlige feilstrategier med hensyn til denne oppgaven er da i utvalget som i den aktuelle KIM - undersøkelsen(Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), en form for overgeneralisering, hvor eleven multipliserer antall bord med en eller annen konstant, uten å ta hensyn til "uregelmessigheten" i mønsteret ved langbordets ender, eller elevene løser oppgaven med enkeltbord i tankene, samt til sist at elever velger lite egnede metoder for å løse problemet, som når de forsøker å tegne og telle langbordet med 25 småbord.

Problemløsning og metode.

I oppgave 9 i oppgavesettet møter elevene en problemsituasjon, ikke ulik flere av tallgåtene i algebrainnføringen i flere av dagens ulike læreverk. Oppgaven er ikke hentet fra noen av KIM - prosjektene, så elevenes respons på oppgaven kan ikke holdes opp mot noen tidligere undersøkelse. Hensikten er at elevene skal løse og i tillegg forklare hvordan de løste oppgaven, og ideen er å undersøke hvilke løsningsmetoder elevene foretrekker og kunne si noe om deres status eller utvikling i algebraen, sett opp imot algebraens historiske utvikling.

Oppgave 9
Hanna er 3 år eldre enn Bent, som er dobbelt så gammel som Marie.
Dersom de 3 til sammen er 38 år, hvor gammel er hver av dem da?

………………………………………………………………………………………..

Hvordan kom du frem til svaret?

…………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Dersom Bent og Hanna til sammen var 45 år. Hvor gammel var da Marie?

……………………………………………………………………………………………….
Hvordan kom du frem til svaret?

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………..

Oppgaver	Frekvens rett svar	Frekvens jenter med rett svar	Frekvens gutter med rett svar
Oppgave 9a	29	21	8
Oppgave 9c	7	7	0

Figur 9,11: Svarfrekvens og kjønnsfordeling i utvalget til oppgave 9.

På oppgave 9 er det 48 % av elever i utvalget som mestrer del a i den forstand at de kommer fram til tallgåtens løsning, mens det kun er 24 % av disse elevene igjen som får til del c av oppgaven. Kjønnsfordelinger er slik at på del a er den i tråd med sammensetningen i utvalget, mens på del b er alle de 7 elevene som har fått til dette, jenter.

Av alle som løser enten en eller begge oppgavene, oppgir 7 at de gjør dette ved hoderegning, 20 at de løser dette ved å prøve seg med ulike løsningsverdier og 2 elever sier at de benytter likninger for å løse problemet. Majoriteten av disse elevene benytter med andre ord det vi kunne kalle mer retoriske metoder i sin problemløsning, de er oppmerksom på og forstår relasjonene mellom de ulike variablene i oppgaven, men unngår å benytte formelle likningsprosedyrer i sitt løsningsarbeid. Av de elevene som løser gåten viser flertallet at de har større relasjonsmessig forståelse av problemet enn velegnet likningsprosedyrekunnskap eller eventuelt evne til å representere problemet i et relevant algebrauttrykk.

Blant de elevene som ikke klarer å komme frem til rett resultat er det også slik at hoderegning og gjett og sjekk er dominerende metoder, men det er også en god andel som forsøker seg med likninger og likningsløsning, uten at de demonstrerer det helt store grepet på likningsverktøyet. Forsøkene strander i all hovedsak på at elevene ikke klarer å representere problemet i rett likning, selv om en del demonstrerer helt greie prosedyremessige ferdigheter i selve likningsløsningen. Disse elevenes prosedyremessige kunnskap overgår således deres evne til å representere problemet i et relevant uttrykk.

Undersøkelsen viser således at elevene i utvalget, i tråd med elever i mange tidligere undersøkelser, deriblant KIM – prosjektet om algebra (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000), i stor grad foretrekker og behersker bedre såkalt retoriske løsningsmetoder og at de sliter med å finne gode likningsuttrykk når de først forsøker seg på mer formelle algebraiske løsningsmetoder. Flere av elevene viser at de kjenner til at problemer av denne karakteren kan løses ved hjelp av algebraiske symboler og likningsbruk, men at de ikke selv behersker å gå fra problemsituasjon til egnet algebrauttrykk.

Verdt å merke seg er det også at majoriteten av de elevene som løser problemet, gjør dette ved å stole på egne mer intuitive metoder, mens majoriteten av de elevene som forsøker å løse oppgaven ved hjelp av algebraens formelle prosedyrer ikke kommer i mål. Jeg tror at dersom flere av disse elevene hadde brukt mer uformelle metoder i oppgaveløsningen ville løsningsprosenten vært høyere. At elever som ikke mestrer å representere problemet i en relevant likning, allikevel forsøker å løse problemet ved hjelp av likningsløsning demonstrer en ukritisk blind tillit til prosedyrene og at en har lagt ”sunt folkevett” på hylla. Kanskje er det algebraiske symbolspråket introdusert for tidlig i den kognitive utviklingen til flere av disse elevene, en utvikling som normalt vil følge algebraens historiske utvikling ifølge Anna Sfard i artikkelen ”The Development of Algebra” (Sfard, 1996). Det kan virke som den symbolske algebraen er introdusert for flere av disse elevene, uten at de har dvelt lenge nok ved den retoriske algebraen, noe som kan ha vanskeliggjort det Anna Sfard omtaler som ”reifikasjon”, å strukturelt gripe et matematisk konsept (Sfard, 1991). Matematikkfaget bør med andre ord i større grad oppmuntre elevene også til å bruke sin intuitive forståelse og sine retoriske metoder i arbeid med problemoppgaver.

Symboler og symbolbruk

En del av oppgavene i undersøkelsen dreier seg om måten vi bruker bokstaver i matematikken. Altså elevenes forhold til algebrasymbolet både med hensyn til bruk og regler for bruk, samt elevenes oppfatning og forståelse av begrepets innhold og karakter.

Å sette inn en verdi.

Noe av det elevene ofte har jobbet mye med i algebraen er å erstatte variabelsymbolet med et tall, og så igjen løse oppgaven med dette kjente tallet. I oppgave 7 møter elevene i hvert fall i begynnelsen en slik situasjon der de skal erstatte bokstavene i uttrykket med korrekt tall, for deretter å regne oppgavene på ordinært vis. Oppgaven inneholder elementer av strukturell kunnskap med hensyn til forståelsen av sammenhengen bokstavsymbol og innsettingsverdi, men i hovedsak vil jeg betrakte kunnskapen som blir testet som prosedyrekunnskap. Aktuelt spørsmål er: Vet elevene hvordan de erstatter bokstavsymbolet med tallverdi? Av de 60 elevene er det 4 som hopper over alle oppgavene i denne delen av oppgavesettet. Du vil nå se en figur med oppgaven slik den var i undersøkelsen;

Oppgave 7
Sett inn tallene og regn ut:

a = 1, b = 2 og c = 3

a + b + c = ………………………………

b = 2

b^3 = ……………………………………..

3x = 7 og 5y = 11

3x + 5y = ………………………………..

a = 10 og b = 2

a – 3b = …………………………………

Ivar har en årslønn på x kroner.
Roalds årslønn er dobbelt så stor som Ivars årslønn.

Hva er Roalds årslønn uttrykket ved x? ....

Jeg vil nå presentere svarfordelingen for utvalget på dette punktet av undersøkelsen i en tabelloversikt på neste side:

Oppgave 7a	**Prosentandel**
Ubesvart	**10**
rett svar	**83,3**
Ulike gale svar	**6,7**
Oppgave 7b	**Prosentandel**
Ubesvart	**6,7**
Rett svar	**65**
Ulike gale svar	**28,3**
Oppgave 7c	**Prosentandel**
Ubesvart	**16,7**
Rett svar	**56,7**
Ulike gale svar	**26,7**
Oppgave 7d	**Prosentandel**
Ubesvart	**11,7**
Rett svar	**50**
Ulike gale svar	**38,3**
Oppgave 7e	**Prosentandel**
Ubesvart	**23,3**
Rett svar	**51,7**
Ulike gale svar	**25**

Figur 9,12: Svarfordeling for utvalget til oppgave 7.

Vi ser av tabellen en tendens til fallende løsningsgrad utover i oppgaven, samt også en tendens til at et økende antall elever hopper over oppgaven. Den første deloppgaven i oppgaven har en løsningsfrekvens på henholdsvis 83,3prosent, og falt relativt lett for majoriteten av elevene. Oppgaven skulle være identisk med en oppgave fra KIM - undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), men en ubevisst ombytting av tegn, fra subtraksjon til addisjon, endret oppgaven noe. For majoriteten av elevene gikk innsettingen og verdisammentrekning greit, når innsettingsverdiene var lave tall og oppgaven et enkelt addisjonsstykke.

I svarregistreringen syntes jeg å se en tendens til ulikhet med hensyn på svarene til elevene i første klasse 1p grupper og elevene i påbygningsklassen, så jeg har valgt også å fremstille svarprosenten for disse gruppene, samt for KIM - studien i en tabell. Prosentsatsene er rundet av til hele prosenttall, siden KIM - tallene er oppgitt i hele prosenttall.

Gruppe	**Prosentandel rette svar på oppgave**				
	7a	**7b**	**7c**	**7d**	**7e**
Hele utvalgsgruppa	**83**	**65**	**57**	**50**	**52**
Elever fra 1 klasse	**86**	**76**	**65**	**54**	**59**
Påbyggelever – fra 3 klasse	**78**	**48**	**43**	**43**	**39**
KIM - studien	**-**	**68**	**70**	**65**	**60**

Figur 9,13: Svarfordeling med hensyn på ulike utvalgsgrupper for oppgave 7, samt tilsvarende tall fra Kim-studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000).

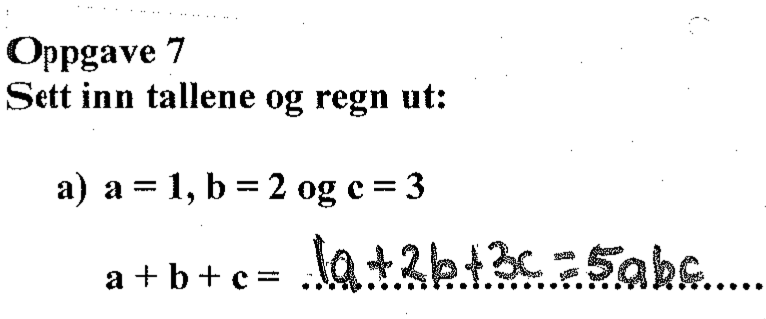
Henholdsvis 65 % og 57 % av alle elevene i utvalget løser oppgave b og c korrekt, mens de tilsvarende tallene fra KIM - undersøkelsen var 68 % og 70 %. Vi ser en klar tendens til at påbygningselevene i mitt utvalg i mindre grad får til disse oppgavene, enn førsteklasseelevene i utvalget gjør, noe som selvfølgelig påvirker forskjellen mellom landsgjennomsnittet og mitt utvalg betydelig. Særlig med henblikk på oppgave c er det en betydelig lavere løsningsfrekvens for elevene i dette utvalget, enn hva landsgjennomsnittet i KIM - studien viste samtidig som tallene fra 1p-gruppa ikke skiller seg så vesentlig fra KIM - tallene. Nå skiller ikke tallene for elevene fra 1p-gruppene seg i like stor grad fra det nasjonale gjennomsnittet, selv om løsningsandelen også for denne gruppen i mitt utvalg er noe lavere.

For oppgave d og e var det 50 % og 52 % av elevene i utvalget som fant fram til rett løsning, mens de tilsvarende tallene i KIM var 65 % og 60 %. Igjen viser elevgruppa i utvalget en noe lavere løsningsfrekvens enn hva den tidligere studien fant, uten at prosenttallene for 1p-gruppa skiller seg så klart fra de nasjonale tallene.

Av de elevene som for så vidt har løst oppgavene korrekt, befinner det seg et lite antall som fyller korrekt inn tallene som erstatning for det rette symbolet, men så ikke regner ut svaret denne innfyllingen gir. Flere elever i utvalget har kommentert i margen på undersøkelsespapirene at dette føler de seg svært usikker på til tross for at de har løst oppgavene korrekt, og under den statistiske registreringen av oppgavesvar ble jeg flere ganger oppmerksom på hvordan elever som ikke fikk til brorparten av de oppstilte oppgavene, plutselig klarte del e, det jeg på forhånd antok var den vanskeligste delen av denne oppgaven. Innføring av flere variabler, høyere tall eller multiplikasjon av variabel og konstant ser en tydelig fører til lavere løsningsfrekvens utover i oppgaven.

Da det var mange ulike forslag, med små variasjoner over uttrykkssammensetningen, så jeg det ikke som hensiktsmessig å kategorisere alle de ulike feilsvarene i tabellen over svarfordelingen til oppgavene, men jeg vil allikevel her komme inn på en del feilsvar i undersøkelsen.

Noen typiske feil elevene gjør i forsøket på oppgaveløsningen er ulike feil i innsetingen av verdi for bokstavsymbolet, og denne tendensen er økende utover i oppgaven. En del elever velger ikke å erstatte bokstavsymbolet med den oppgitte innsettingsverdien, men isteden foreslå et uttrykk basert på en tro om at innsetningsverdien skal multipliseres med det tilhørende bokstavsymbolet, slik som den eleven som foreslår denne løsningen på del a;


Oppgave 7
Sett inn tallene og regn ut:

a) a = 1, b = 2 og c = 3

a + b + c = 1a+2b+3c=5abc

Elevsvar 1: Eleven setter inn variabelverdi i algebrauttrykket.

Besvarelsen demonstrerer også andre typiske feiloppfatninger som vil tas opp fortløpende i gjennomgangen.

Trøbling med innsettingen er en enda mer hyppig feil med hensyn på del c av oppgaven, der det dominerende feilsvaret i dette utvalget er som i KIM - studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), 76. Hele 15 % av respondentene i mitt utvalg svarer 76 på denne oppgaven, mot 11 % i KIM- undersøkelsen. Disse elevene setter inn verdien 7 for x i uttrykket og 11 for y i uttrykket, istedenfor å erstatte 3x med 7 og 5y med 11, men derifra og ut gjør disse elevene korrekte beregninger knyttet til oppgaven. Disse elevene kjenner tydelig regnreglene for behandling av uttrykket, men trøbler med innsettingen siden den ikke følger det helt tradisjonelle mønsteret, med å sette inn verdier for den variable, de oppfatter kanskje ikke at 3x og 5y svarer til et tall, det er det bare variabelen som gjør. Elevene i denne gruppa demonstrerer en usikkerhet med hensyn på forståelse av uttrykkets betydning, på tross av at de sikkert ville klare å få til mange flere mer tradisjonelle algebraoppgaver, elevene viser større instrumentell enn strukturell innsikt. På dette punktet er dette feilsvaret noe mer populært i mitt utvalg, enn i den nasjonale kartleggingen, men sett opp imot at totalandelen som svarer feil er høyere i mitt utvalg og at andelen som ikke besvarer i tillegg er litt lavere, må det være en del andre feilsvar til denne oppgaven, og disse består i all hovedsak av ulike bokstavsammentrekninger eller bokstavsamlinger, som forekommer hyppigere i mitt utvalg enn den opprinnelige studien.

Andre feil elevene gjør i oppgaveløsningen er som elevbesvarelsen over demonstrerer, ulike feil i sammentrekningen av sine uttrykk, mer prosedyremessige feil. De aktuelle elevene har da alt demonstrert manglende kunnskap med hensyn til variabelinnsettingen, manglende relasjonell forståelse, siden riktig innsetting av variabelverdi gir et ”ordinært” matematikkstykk å løse. En del av elevene gjør altså feil på den måten at de ”legger” alle faktorer ”inntil” hverandre og anser oppgaven som løst. I den aktuelle elevbesvarelsen summerer eleven alle tall i uttrykket sitt og trekker sammen alle bokstavvariabler i oppgaven til ett uttrykk ”5abc”. Andre slike eksempler på feil i uttrykkssammentrekning i tilknytning til disse oppgavene, er svar på former som for eksempel ”8xy” til oppgave c, eleven har summert 3 og 5, og i tillegg trukket bokstavene x og y sammen i dette uttrykket. Eksempler på slike løsningsmetoder fant man også i KIM – prosjektet (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), der det fastslås at prosentandelen slike typer feilsvar økte med høyere klassetrinn. Jeg vil komme mer tilbake til denne typen sammentrekningsfeil i forbindelse med oppgave 4.

Disse ulike uttykksammensetningene demonstrerer også det fenomenet vi i matematikkdidaktikken kaller ”lack of closure”, troen på at ett sluttresultat ikke skal inneholde instruksjoner av typen +, -. En del elever i utvalget ser altså ut til å ha som strategi at de forsøker å unngå prosedyrevariabler i det de anser for å være sluttsvar, på den måten at de i ”siste uttrykksbehandling” sløyfer prosedyrevariablene. Disse elevene demonstrerer dermed en begrenset forståelse av likhetstegnet samt av algebraens prosedyremessige aspekter.

Ulike former for slike sammentrekninger og bokstavuttrykkssvar er det flere av i elevenes respons på alle de ulike oppgavene i denne bolken av undersøkelsen, opp imot 10 %, så sammenholdt med KIM - resultatene, der det først og fremst fokuseres på ulike feilaktige heltallsløsninger i gjennomgangen av undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000), virker det for meg som om ulike bokstavsammentrekninger kan ha vært noe mer vanlig i mitt utvalg. Denne tendensen kan igjen styrke KIM - studiens påstand om at slike svarsammentrekninger blir vanligere utover i skoleløpet.

For del b spesielt, gjelder det at mange tydelig har summert ”2+2+2” og fått 6, dermed viser elevene klart at de ikke legger merke til, eventuelt kjenner eller husker betydningen til, potensnotasjonen.

For oppgave 7d følger mine resultater i større grad KIM- resultatene og svarfordelingen viser en spesielt stor spreding med hensyn på gale heltallssvaralternativer, flere elever mener at svaret på oppgaven er -22, 9, 2, 5,8 eller 10. Svarene viser til ulike fortolkninger av sammensetningen tall og bokstav som til eksempel;

- 22 kommer som et resultat av å fortolke ”a – 3b” som ”10-32”, elevene setter altså inn variabelverdien og fortolker dette som et ordinært tall. Mangler forståelse for multiplikasjonsfaktoren mellom konstant og variabel i algebrauttrykk, trekker inn posisjonssystemet i fortolkning av algebrauttrykket.
- 9 fremkommer sannsynligvis fordi elevene ”i farten” husker feil variabelverdi og setter inn =3 i uttrykket.
- 2 kommer elevene antagelig frem til fordi de misforstår 3b som potensuttrykket b^3 og setter inn b=2 i dette.
- 8 er kanskje et resultat av innsetingen ”a-b”, det vil si ”10- 2”, hurtig eller halvlest oppgave, og ignorering av at 3b gir en annen verdi en b.
- 5 får elevene antagelig fordi de adderer 3 og 2 i 3b leddet
- Feilsvaret 10 er antagelig en halvgjort innsetting av a som variabel da dette oppfattes som den enkleste delen av uttrykket, det eleven klarer før den gir opp.

For deloppgaver 7e viser svarfordelingen mindre variasjon i feilsvarene.

Ulike svaralternativer	Utvalgets prosentandel	KIM – studiens prosentandel
Ubesvart	23	14
2x eller x+x (rett svar)	52	60
x^2	23	18
Andre uttrykksammentrekninger	2	0
Ulike heltallsvar	0	4
Sum	100	100

Figur 9,14: Svarfordeling til oppgave 7e i mitt utvalg, og tilsvarende fordeling for Kim-undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000).

Hele 14 elever eller om lag 23 % av respondentene foreslår at Roalds årslønn kan uttrykkes ved formelen x^2 og tar i bruk, kanskje tipper, de to opplysningene som er gitt i oppgaven, men med feil sammensetning. Et par elever forsøker seg med forslag som x og 2xx, mens hele 23 % av elevene sliter sånn med overgangen fra situasjon til uttrykk i denne oppgaven at de hopper like godt over den. Dette tallet er mye høyere enn det tilsvarende tall for de andre deloppgavene i denne avdelingen. Igjen ser vi en tendens til noe lavere løsningsandel i mitt utvalg enn i den nasjonale undersøkelsen, samt at ulike gale uttrykkssammentrekninger opptrer hyppigere som svar i mitt utvalg, enn hva som var tilfelle i KIM - studien.

Om en ser på oppgave 7 totalt sett finner vi at svarfordelingen med hensyn på antall rette følger en fordeling ikke helt ulik nominalfordelingen.

Antall rette svar	0	1	2	3	4	5
Antall elever	5	8	15	19	8	4

Figur 9,15: Oversikt over utvalgselevene antall rette svar på oppgave 7 i undersøkelsen.

Noen av feilene som gjøres i oppgaven er selvfølgelig resultat av slurv og for dårlig oppgavelesning, men usikkerheten blant elevene i utvalget er tydelig stor siden antall som får til alle deloppgaver helt korrekt er lavt, noe av denne usikkerheten kan føres direkte tilbake til usikkerhet med hensyn til tallregning, for eksempel betydningen av potensnotasjon eller prioritetsregler. Flere elever viser manglende forståelse for algebraisk notasjon av typen 3x, et tall multiplisert med variabelen, og veksler og blander sammen multiplikasjon og addisjon i forbindelse med slike uttrykk. Vilkårlig sammentrekning eller bruk av variablene i oppgavene er utbredt, og vilkårlig innsetning av variabelverdi som tilskudd til originaluttrykket er heller ikke uvanlig, jeg finner også indikasjoner på feilforståelse med hensyn til posisjonssystemet i forbindelse med innsetting i uttrykk på formen 3x.

Å trekke sammen uttrykk

Som vi så i forrige avsnitt er det flere elever som sliter med å trekke sammen uttrykk på korrekt vis, og i oppgave 4 er det lagt opp til en test av disse ferdighetene.

Oppgave 4	
Legg sammen 6n og 3n	**svar:………………………………**
Legg sammen 2 og n + 5	**svar:………………………………**
Legg sammen 4 og 3n	**svar:………………………………..**

Oppgave 4 i oppgavesettet.

I oppgaven blir elevene bedt om å trekke sammen to algebraiske ledd, og oppgaven viser således om elevene kjenner regneregler for uttrykk med bokstavsymboler. Oppgaven jakter på mange måter på kunnskaper av instrumentell og prosedyremessig karakter og det er fult mulig å utføre beregningene med en svakt utviklet variabelforståelse. Vi skal nå først se en oversikt over løsningsprosentene i KIM - undersøkelsen.

Deloppgave	Andel rette svar
	alle
6n og 3n	84
2 og n+5	37
4 og 3n	46

Figur 9,16 : Løsningsprosenter på samme oppgaver fra KIM – studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000).

I den nasjonale undersøkelsen fant forskerne en tendens til at mange elever, over 80 % klarte den første av disse oppgavene, på bakgrunn av dette ville en forvente at akkurat denne oppgaven har en høy løsnningsfrekvens også i dette utvalget. Mens oppgave b og c falt noe vanskeligere for landets 10.klassinger og vi vil vente også dette for mitt utvalg.

Deloppgave	**Andel rette svar**				
	alle	**gutter**	**jenter**	**1 klasse p elever**	**3 klasse påbygg**
6n og 3n	**78**	**100**	**71**	**76**	**83**
2 og n+5	**32**	**53**	**24**	**41**	**17**
4 og 3n	**40**	**73**	**29**	**46**	**30**

Figur 9,17: Oversikt over prosentandel utvalgselever med rette svar på oppgavene i 4.

Løsningsfrekvensen for utvalget totalt er ikke så høy som en kanskje kunne vente, dette kan som tidligere nevnt ha med blant annet utvalgets skjevhet å gjøre. Som vi har sett i noen tidligere oppgaver, kan en også på denne oppgaven, se en tendens til at det er færre blant påbyggingselevene som mestrer denne typen oppgave, det er jo en god stund siden mange av dem har jobbet med algebra og matematikk og en del har kanskje ”gått i glemmeboka”. Tallene for 1p elevene skiller seg ikke så mye fra de nasjonale tallene, tendensen i denne gruppen er relativt lik tendensen i KIM. I tillegg viser svarfordelingen i mitt utvalg en kjønnsulikhet på dette punktet i undersøkelse. For alle deloppgavene i denne bolken utgjør guttene, som er ¼ av det totale utvalget, mer enn 25 % av den gruppa som løser oppgavene.

I gruppa er det om lag 8 elever som hopper over og ikke besvarer punkt b og c i oppgaven. Typiske feil de resterende elevene gjør i oppgaveløsningen er å trekke sammen alle impliserte tall i ett langt uttrykk, hvor bokstavsymbolene er satt side om side, eller om vi vil, lagt sammen i betydningen; samlet sammen, i tillegg er alle de ordinære tallene multiplisert eller addert sammen. For de ulike oppgavene finner vi da svar som;

- ”9n^2” og ”18nn”, dette har henholdsvis 7 % og 3 % av elevene i utvalget svart at 6n og 3n tilsvarer. Potenssvaret 9n^2 var også i KIM (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000) et populært galt svar – omkring 10 % svarte dette, mens 18nn ikke er nevnt som svar i gjennomgangen av den nasjonale undersøkelsen.
- ”7n”, hele 30 % av elevene mener at 2 og n+5 gir dette svaret. Dette svaret var om lag like poppulært i den nasjonale undersøkelsen, da i overkant av 30 % av 10.klassingene valgte dette svaret. I tillegg er det et par elever som svarer ”8n” på denne deloppgaven, 1% i den nasjonale undersøkelsen. Disse elevene bruker sannsynligvis samme løsningsmetode, å summere 2 og 5, men klarer kanskje ikke helt å legge sammen 2 og 5 riktig i ”farten”.
- ”7n” og ”12n”, som i Kim-studien hevder hele 40 % av elevene at 4 og 3n summeres til 7n. Kun 3 % av mine respondenter og ingen i den tilsvarende KIM - studien, oppgir svaret 12n, 3 og 4 multiplisert for å få 12, og ved nærmere ettersyn viser det seg at disse elevene ikke velger denne strategien konsekvent i de andre sammenliknbare oppgavene. Svaret ser dermed ut til å være mer et resultat av metodeusikkerhet, enn resultat av en fasttømret feiloppfatning omkring hvordan slike oppgaver løses.

For øvrig blander en del elever sammen de ulike opplysningene gitt i oppgaven, kanskje leser noen feil i farten eller kanskje kjenner de ikke igjen instruksjonene i oppgaven siden disse er presentert i ord og ikke med sine ordinære symboler. Flere elever ender uansett opp med forslag som ”6n+3” for a, ”5+n”, ”5n+2”, ”2n+5” og liknende for deloppgave b. Et par elever kommer frem til at i oppgave b må svaret være ”8”, de legger sannsynligvis feilaktig sammen 5 og 2 og får 8, samtidig som de ignorerer variabelen i oppgaveteksten. Denne strategien med å ignorere variabelen finnes også i den nasjonale undersøkelsen, men da kun hos elever på lavere klassetrinn.

Også med hensyn til å legge sammen variabeluttrykk, er det som fordelingen viser, stor usikkerhet i utvalget med hensyn til metoder, mange bare samler variablene sammen, samt at det er tydelig at mange elever ikke vet hvorvidt de skal adderer eller multiplisere tallene når instruksjonen lyder legg sammen. Det er tydelig av løsningsprosentene at de prosedyremessige kunnskapene ikke helt holder nivået fra KIM - undersøkelsen, særlig blant påbygningselevene, som har ikke har hatt matematikk på skolen på en stund.

Jeg vil nå kikke på hvordan elevene fordeler seg med hensyn til hvor mange av disse oppgavene de har mestret.

Antall rette svar på oppgave 4	Prosentandel elever
0 rette svar	18
1 rett svar	40
2 rette svar	15
3 rette svar	27
Sum	100

Figur 9,18: Oversikt over andelen elever med deres andel rette svar.

Oversikten viser at en god del elever får til en eller to, men ikke alle disse oppgavene, slik at usikkerheten i elevgruppa omkring hva som er rett metode for uttrykkssammentrekning tydelig er stor. I underkant av 30 % av elevene i utvalget har gode prosedyremessige ferdigheter og er tydelig sikre på hvordan uttrykkssammentrekning skal foregå, og i all hovedsak er dette 1p elever og i tillegg er det slik at guttene er overrepresentert i denne gruppa, 50 % av gruppa er gutter, mens kun 25 % av hele utvalget er gutter.

Tabellen viser også at i underkant av 20 % av utvalgselevene, har tilsynelatende i liten grad noen ide om hvordan de løser slike oppgaver, ved nærmere studie av disse elevene finner jeg at alle disse elevene er jenter, og majoriteten av dem har hoppet over alle deloppgavene til oppgave 4, med et par unntak, noen få av disse jentene har også svart med typiske feilsvar på alle deloppgavene til oppgaven. Formell regning med bokstavsymboler, det vi ofte sterkest forbinder med algebra, ser ut til å falle vanskeligere for en del av jentene enn guttene i utvalget, resultatet er kanskje ikke helt overraskende med henblikk på kjønnsforskjellene jeg har funnet i undersøkelsens første del omkring elevenes syn på og oppfatning av og omkring algebraen, men interessante, TIMSS rapporten ”Hva i all verden skjer i realfagene?”(Lie, Kjærnsli, Brekke, 2000), tatt i betraktning, siden denne påpeker at jenter ofte er bedre på oppgaver der det går på å bruke eller følge formelle algebraiske regler.

Å finne verdien når variabelverdien er uvesentlig.

I oppgave 5 skal elevene nærme seg et algebrauttrykk på mer generelt grunnlag, fokuset bør ikke være på å identifisere den ukjente, men på hvor mye høyere resultatet må bli enn i svaret i oppgaveteksten. Slik så oppgaven ut i oppgavesettet:

Oppgave 5

Hvis a + b = 43 så er a + b + 2 = ……………………..

Hvis e + f = 8 så er e + f + g = ………………………

I Kim – prosjektet (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000) hadde den første av disse oppgavene en svært høy løsningsfrekvens, 90 % av elevene i denne undersøkelsen fant fram til det korrekte svar på oppgavene, mens kun 38 % klarte b-oppgaven. Som vi så i forrige avsnitt kan vi kanskje ikke forvente at løsningsfrekvensen vil være så på dette nivået i dette utvalget.

Deloppgave	Prosentandel rette svar		
	alle	gutter	jenter
a	77	80	76
b	33	40	31

Figur 9,19: Oversikt over andel rette svar blant utvalgselevene tiloppgave 5.

I min undersøkelse kommer over 75 % av elevene i utvalget, fram til det korrekte svar i oppgave a, men det kun 20 elever eller 1/3 av elevene i utvalget som løser del b. Tendensen er altså lik som i den nasjonale undersøkelsen, men med en noe lavere løsningsprosent i begge deloppgaver. Guttene er litt overrepresentert i gruppa som løser oppgavene, men forskjellen er ikke så markant som i forrige oppgave. Totalt er det 8 elever som hopper over punkt a i oppgaven og hele 19 elever hopper over deloppgave b.

For del a finner vi at det mest typiske feilsvaret, gitt av 7 % av elevene, er å oppgi at summen er uforandret, fortsatt ”43”. Disse elevene ignorerer tillegget på 2, mens 1 elev i utvalget ignorerer det løste stykket gitt i oppgaveteksten og oppgir at ”2” er svaret. I tillegg foreslår 1 elev å samle alle de ulike opplysningene gitt i oppgaven i uttrykket ”45ab”, en sammenleggingsmetode som ofte forekommer i ulike besvarelser i denne undersøkelsen.

For punkt b i oppgaven er det mest hyppige gale svaret ”8g”, som hele 12 % av elevene mener at løser oppgaven. Også dette feilsvaret av typen, ”å samle sammen alle faktorene i uttrykket”, påpeker som tidligere nevnt forfatterne av KIM - studiet, at viser seg å bli mer hyppig utover i skoleløpet. I oppgaveløsningen samler altså mange av elevene igjen alle de oppgitte tall og variabler sammen i et uttrykk, på den måten at de summerer alle tallverdiene og legger alle bokstavsymbolene inntil hverandre. En elev har benyttet seg av samme type ”løsningsmetode” med endt med ”8efg” som svar på deloppgave b.

Mange av elevene har som tidligere nevnt tydelig vansker med å betrakte uttrykk som fortsatt inneholder for eksempel addisjonstegnet som ferdige eller løsning på et problem, de vil ”lukke” oppgaven og kvitte seg med addisjonssymbolet. Dette ønsket om ”å lukke” oppgaven kommer også til uttrykk når elever ender med svar som er hele tall i oppgaver der et uttrykk med bokstavsymbolet er det egentlige svaret, som til eksempel i deloppgave b der flere elever svarer verdier som 12, 8 og 9 og andre heltall. Uttrykk som inneholder operatorer som + og bokstavsymboler betraktes ikke av eleven som svar på oppgaven, fordi slik disse elevene betrakter det, jakter vi på 1 ukjent verdi.

For å ende med heltallige svar på oppgaven bruker elevene ulike metoder, for eksempel har kanskje de 4 elevene i utvalget som ga ”12” som svar på ”e + f + g”, gitt hver av bokstavene den samme verdien 4, på bakgrunn av informasjonen om at ”e + f = 8” og slik summert ”4 + 4 + 4”. En elev har nok fulgt noe av den samme tankegangen om at hver av bokstavene symboliserer eller har noe med verdien 4 å gjøre, når han har kommet frem til at svaret må være ”4e + 4f + g”, kanskje har eleven etter dette gitt opp å løse oppgaven videre eller kanskje ser eleven seg fornøyd med svaret, og kjenner til at slike uttrykk kan være ”svaret” i et algebraregnestykke.

Feilsvaret ”8” kommer elevene gjerne frem til ved å ignorere tillegget og beholde resultatet gitt i oppgaveteksten, mens for svaret ”9” har muligens de 2 elevene som har oppgitt dette, erfart så ofte at den ukjente verdien er ”1” i oppgaver de har regnet på, eller har de kanskje tatt med seg erfaring fra arbeid med funksjoner der vi ofte velger å teste for x-verdien ”1” først. Disse ulike resultatene, alle også funnet i Kim-studien, er uansett et produkt av tipping med grunnlag i misoppfatninger, ofte fundert på overgeneralisering, og viser sviktende prosedyremessig kunnskap hos deler av elevene i utvalget.

Bokstaver som generelle tall

I oppgave 6 i undersøkelsen blir elevene bedt om å ta stilling til hvorvidt 2 uttrykk er like, kan være like eller aldri er like og begrunne svaret sitt. Uttrykkene innebærer algebraisk generalisering av aritmetiske regler og henger således sammen med beviser og generelle betraktninger. Kunnskapen som testes er i første rekke av strukturell karakter og på bakgrunn av utvalgselevenes betraktninger omkring hvilke emner de forbinder med algebra, forventer jeg at oppgaveformen vil være noe ukjent for flere av elevene og at å løse oppgaven for mange elever vil være en utfordring. Jeg har valgt å presentere svarfordelingen for gruppa samlet, ikke splittet i forhold til klassenivå eller kjønn, dette fordi jeg ikke finner ulikhet med hensyn til kjønn i svarfordelingen, og ulikheten i svarfordelingen med hensyn på klassetrinn kun er en svakt noe høyere løsningsfrekvens for 1p-elevene enn påbygningselevene. Svarfrekvensene i utvalget fordeler seg slik, jeg har markert/uthevet det korrekte svaret på hvert punkt.

Avgjør om disse utsagnene er:	**Alltid sant.**	**Aldri sant.**	**Kan være sant.**	**Ubesvart.**
a + b + c = c + a + b	**55**	**3**	**27**	**15**
4 + x = 4 + y	**10**	**43**	**25**	**22**
2a + 3 = 2a - 3	**10**	**50**	**17**	**23**
l + m + n = l + n	**3**	**40**	**22**	**35**

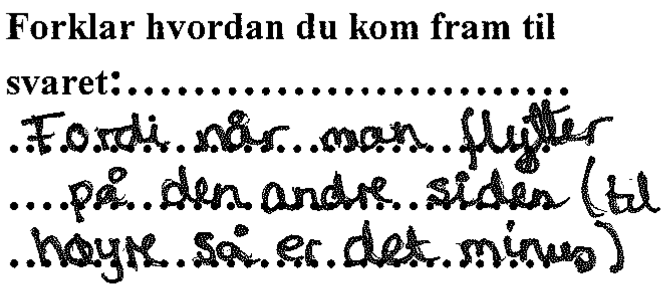
Figur 9,20: Prosentvis svarfordeling til oppgave 6 i undersøkelsen.

Som leseren selv kan se er andelen elever som ”hopper over” deloppgaver sterkt økende utover i denne oppgaven, noe jeg antar henger sammen med økende usikkerhet med hensyn til riktigheten av utsagnene. Mange av de elevene som besvarer spørsmålene markerer selv at de er usikre med hensyn til konklusjonen, dette gjelder både elever som svarer korrekt og galt. Andelen elever som forklarer sitt valg er lavere enn antall elever som besvarer oppgaven, og en god del av begrunnelsen kan egentlig ikke sies å være begrunnelser, men mer betraktninger av typen; ”nå tipper jeg” eller ”dette ser rettest ut”. Av svarfordelingen kan en se at oppgave b og d, der riktig svar er at det kan være sant, falt vanskeligst for elevene, slik det også var tilfelle i nasjonalt læremiddelsenter sin undersøkelse, som til samme oppgave hadde følgende svarfordeling.

Avgjør om disse utsagnene er:	Alltid sant.	Aldri sant.	Kan være sant.	Ubesvart.
a + b + c = c + a + b	65	9	18	7
4 + x = 4 + y	4	54	34	7
2a + 3 = 2a - 3	4	72	14	9
l + m + n = l + n	5	49	33	12

Figur 9,21: Prosentvis svarfordeling til tilsvarende oppgave i KIM - undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000).

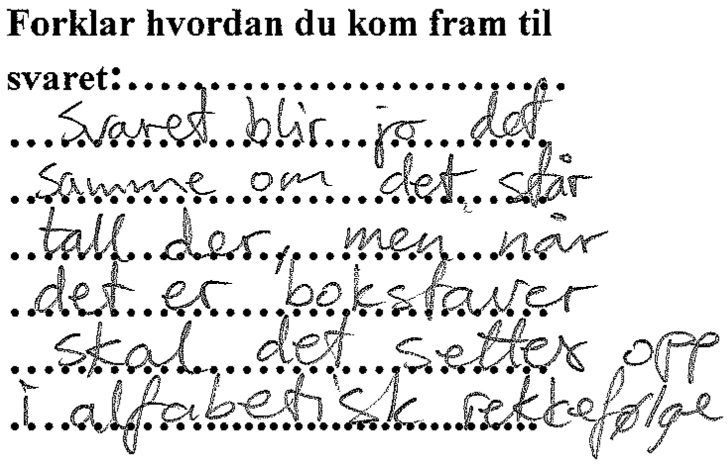
En ser av svarfordelingen at den første oppgaven tydeligvis er enklest for elevene å forholde seg til. Over 50 % av elevene i utvalget svarer korrekt på denne oppgaven, mot 65 % i KIM - studien. Alle elever i mitt utvalg som begrunner svaret sitt, begrunner det med forklaringer som på et aller annet vis tar tak i at rekkefølgen her er uvesentlig, at det er likt på begge sider av likhetstegnet eller at det er de samme tallene man legger sammen. Veldig få, kun 3 % av elevene, svarer på del a, at sammenhengen er aldri sann, tilsvarende tall fra den nasjonale undersøkelsen er 9 %, dette feilsvaret er altså på tross av utvalgets lave løsningsprosent ikke like poppulært i mitt utvalg som i KIM, noe jeg vil tro henger noe sammen med at andelen elever som ikke besvarer oppgaven er høyere i mitt utvalg. Av de få elevene som svarer slik i min undersøkelse kommer en med følgende begrunnelse for sitt svar.


Forklar hvordan du kom fram til svaret:.........................
.Fordi.når..man..flytter
....på..den andre..siden (til
..høyre..så.er.det.minus)

Elevsvar 2: Eleven forklarer hvorfor "a + b + c = c + b + a" aldri er sann.

Misforståelsen eleven har ser ut til å ha sitt grunnlag i at eleven har lært at likninger løser man ved å flytte tall over likhetstegnet, og så bytte fortegn på dem. Denne typen forklaring og misoppfatning, som man fant flere av i KIM - undersøkelsen i tilknytning til akkurat denne oppgaven, er det flere elever som viser i forklaringer knyttet til flere av de andre deloppgavene i denne oppgavedelen.

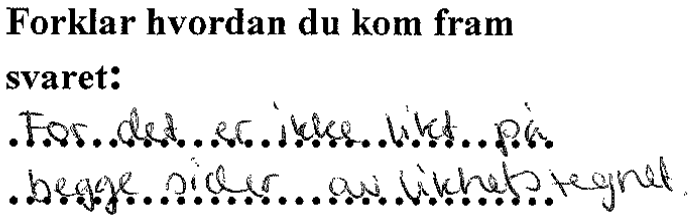
Som i den nasjonale undersøkelsen, KIM - studiet, er langt flere elever, om lag 1/3, usikre og velger alternativet ”dette kan være sant” på punkt a. Blant disse elevene finner du ikke så mange som begrunner svaret sitt, men noen få gjør det, og flere av disse tar tak i at bokstaver i matematikkstykker bør stå i alfabetisk rekkefølе.


Forklar hvordan du kom fram til svaret:
Svaret blir jo det samme om det står tall der, men når det er bokstaver skal det setter opp i alfabetisk rekkefølge

Elevsvar 3. Eleven forklarer hvorfor ”a + b + c = c + b + a” kan være sann.

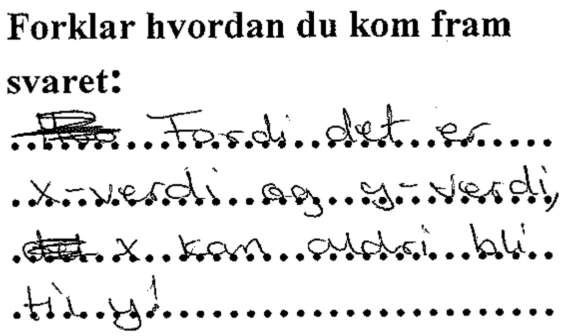
Eleven anser tydeligvis algebra for å være noe ”hokus pokus”, som ikke følger vanlige matematikkregler eller logikk. Det som ellers er sunn fornuft, gjelder ikke når vi setter inn bokstaver i matematikkstykkene.

I del b av oppgave 6 er det kun 25 % av elevene i mitt utvalg som velger det korrekte alternativet, mot 34 % i på landsbasis, i den grad utvalgselevene begrunner svaret sitt tar de fleste tak i at dersom x = y vil uttrykket være sant. Som i den nasjonale undersøkelsen foretrekker et betydelig antall, 43 % av utvalgselevene, mot 54 % på KIM - studien, at uttrykket ”4 + x = 4 + y” aldri er sant. Argumentene mange av utvalgselevene bruker for sitt ståsted dreier seg i bunn og grunn om at x og y er forskjellige ting, slik demonstrerer de en svært objektrelatert forståelse av bokstavsymbolet. Atter andre argumenterer med at x og y er ulike ukjente tall eller verdier, eller at de to uttrykkene ikke er like, og dermed ikke har samme verdi.


Forklar hvordan du kom fram svaret:
For det er ikke likt på begge sider av likhetstegnet.

Elevsvar 4: Eleven forklarer hvorfor ”4 + x = 4 + y” aldri er sann.

Denne eleven viser jo en korrekt forståelse av likhetstegnet, men mangler noe i sine betraktninger omkring bokstavsymbolets mulige verdier. En annen elev som nok ikke helt har samme syn på likhetstegnets funksjon forklarer:



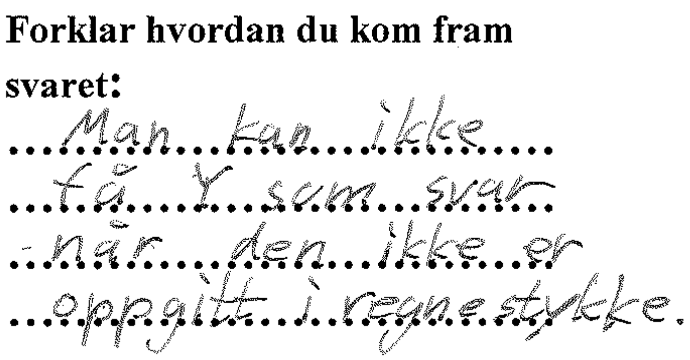
Forklar hvordan du kom fram svaret:

~~Fo~~ Fordi det er x-verdi og y-verdi, ~~det~~ x kan aldri bli til y!

Elevsvar 5: Eleven forklarer hvorfor ”4 + x = 4 + y” aldri er sann.

Eleven betrakter bokstavene som to ulike objekter, og har vansker med å se at disse kan være to like størrelser. I tillegg avslører kanskje denne delen av utsagnet; ”bli til”, en tanke om at likhetstegnet først og fremst er en transformasjonsoperator, i regnestykkene blir ”noe” til noe annet.

Denne typen misoppfatning blir enda tydeligere hos elever som forklarer at y ikke kan være på svarsiden av en oppgave. De aktuelle elevene viser således at de betrakter likhetstegnet mer som en instruks om handling, prosessnotasjon, enn som en beskjed om likevekt mellom de to uttrykkene.



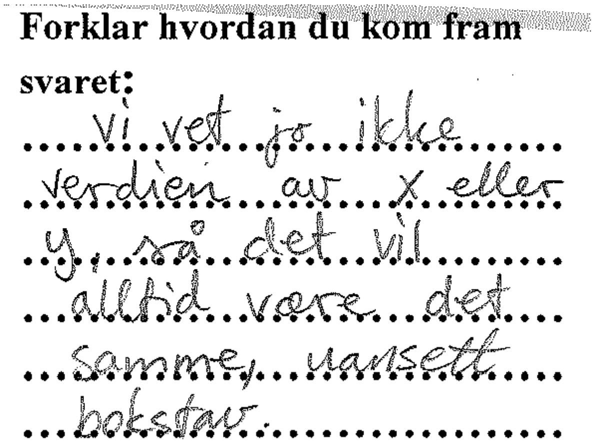
Forklar hvordan du kom fram svaret:

Man kan ikke få Y som svar når den ikke er oppgitt i regnestykke.

Elevsvar 6: Eleven forklarer at 4 + x = 4 + y er usann.

Atter andre elever, tar tak i det samme, når de fortviler seg over at det plutselig trekkes inn en y fra ingenstedshen i ”svaret”, eller hevder at vi kan jo ikke vite hva y er. Å bruke bokstaven y er tydeligvis knyttet til å løse en likning eller finne en verdi for mange av disse elevene, de betrakter på mange måter de to bokstavvariablene gjennom ”ulike briller”, som ulike fenomener med ulike regler knyttet til seg. Satt på spissen virker det som x er den ukjente verdien og y er løsningen eller svaret på oppgaven.

Blant de som svarer at uttrykket alltid er sant er det svært få som gir noen begrunnelse, men de to som prøver seg på en forklaring tar begge utgangspunkt dette:


Forklar hvordan du kom fram svaret:
vi vet jo ikke verdien av x eller y, så det vil alltid være det samme, uansett bokstav.

Elevsvar 7: Elevens forklaring til at 4 + x = 4 + y

Slik jeg forstår argumentasjonen hos begge de to som har forklart seg om dette, er deres misforståelse på sett og vis, at siden bokstaven skjuler et ukjent tall og tallet er ikke bestemt ennå, så er det alltid likt.

I c punktet av oppgaven, går andelen elever som svarer korrekt opp igjen, i mitt utvalg som i den nasjonale undersøkelsen. Om lag halvparten av elevene er skråsikre på at utsagnet ”2a + 3 = 2a -3” aldri er sant, for som ulike elever selv begrunner det, ”minus er ikke pluss”, ”å trekke fra og legge sammen er aldri det samme” og ulike varianter av disse argumentene går igjen hos flere av respondentene. Det er mange som forklarer sitt svar på denne oppgaven sammenliknet særlig med b og d oppgaven, og de er på mange måter mer sikre på dette svaret enn de gir uttrykk for å være i noen av de andre sammenliknbare oppgavene.

Blant de 13 % som tror at utsagnet i oppgaven kan være sant, 17 % i KIM (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), møter vi flere forklaringer av typen at når man flytter noe over likhetstegnet så skifter det verdi, et par elever forsøker seg også med et tilhørende regnestykke som de ikke helt klarer å fullføre, men som skal illustrere hvordan utsagnet over kan være sant. Ingen av elevene som oppgir at utsagnet alltid er sant gjør noe forsøk på å begrunne avgjørelsen sin.

I oppgave d er antall elever som ”hopper over” oppgaven høyt, i tillegg til at andelen elever som finner frem til det rette svaret er lavt, kun i overkant av 20 %. Blant de elevene som faktisk kommer frem til det korrekte svaret er det mange som begrunner sitt valg, og begrunnelsene dreier seg i all hovedsak om at m kan være 0, eller at dette avhenger av variabelverdien til m. Halvparten av denne gruppa er gutter, men for øvrig finner jeg ingen betydelige kjønnsforskjeller på de andre deloppgavene her. Noen få elever viser at de tipper korrekt ved å komme med ulike forklaringer som ikke holder mål.

Forklar hvordan du kom fram til svaret: Det ~~har~~ kan være sant. Hvis man for slått sammen m og N og kaller det N

Elevsvar 8: Eleven forklarer hvorfor ”l + m + n = l + n” kan være like.

En annen elev velger usikkert at utsagnet kan være sant, men er veldig i tvil fordi:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: har aldri brukt m eller n i mattestykket før

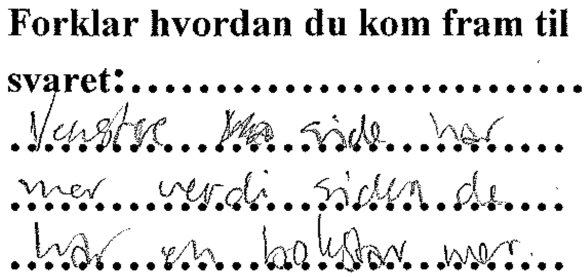
Elevsvar 9: Eleven forklarer omkring hvorfor ”l + m + n = l + n” kan være like.

2 av de 60 eleven, 3 %, velger alternativet at utsagnet alltid er sant, men ingen av dem kommer med noen forklaring på svaret sitt. Hele 24 elever, 40 %, nesten dobbelt så mange som de som velger rett svar, angir i denne oppgaven at ”l + m + n = l + n” aldri kan være sant. Denne tendensen kan en også finne i den opprinnelige studien, der nær 50 % av respondentene krysser av for at uttrykket aldri er sant. Som i Kim-studien, argumenterer også flere av de som velger dette svaret i mitt utvalg, med at det som står på de to sidene av likhetstegnet ikke er likt, og derfor ikke kan være det samme. En noe større andel elever tar på et eller annet vis tak i at m er borte, noe mangler på den ene siden av likhetstegnet og dermed kan ikke utsagnet være sant, eller de ordlegger seg mer som dette:

Forklar hvordan du kom fram til svaret: fordi men forsvinner ikke av seg selv

Elevsvar 10: Eleven forklarer hvorfor ”l + m + n = l + n” aldri er like.

En elev tar tak i både antallet variabler og likevekten, og viser en veldig konkretisert oppfattning og forståelse av bokstavvariabler og likevektsprinsippet.


Forklar hvordan du kom fram til svaret: Venstre hå side har mer verdi siden de har en bokstav mer.

Elevsvar 11: Eleven forklarer hvorfor ”l + m + n = l + n” aldri er like.

Eleven har kanskje en noe begrenset erfaring med hvilke verdier bokstaver kan representere, hun har nok i liten grad jobbet med bokstaver som generelle symboler. Det forutsettes tydelig at bokstavene representerer positive, og gjerne hver sine, ukjente verdier, noe som vil gjøre at uttrykket på venstre side av likhetstegnet totalt har en høyere verdi enn høyresideuttrykket. En omformulering av spørsmålet til ”Når er disse uttrykkene like?” ville kanskje ledet eleven til ny innsikt med hensyn til ulike mulige variabelverdier.

Svarfordelingen og typen misoppfatninger undersøkelsen avdekker i utvalget følger på mange måter resultatene i KIM (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), men med en noe lavere løsningsprosent og en høyere andel elever som ikke besvarer alle oppgavene i denne bolken av undersøkelsen. Verdt å merke seg er at det er færre elever i mitt utvalg som går vegen gjennom et talleksempel i sin forklaring enn hva Kim-studien fant. Slik det også var færre som endte opp med tallsvar i de tidligere gjennomgåtte oppgavene i mitt utvalg enn i KIM - studien. Elevgruppa er på sett og vis fortrolig med at bokstavene har sin plass i matematikken, de bare har ikke det helt store grepet på hvordan man regner med disse bokstavene eller hvilken betydning de har.

Hvor usikker elevgruppa som helhet er med hensyn på disse generelle betraktningene kan fordelingen med hensyn på hvor mange rette hver elev i gruppa får på oppgaven vise.

Antall rette svar	Antall elever
0	15
1	18
2	9
3	14
4	4

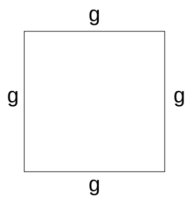
Figur 9,22: Oversikt over antall utvalgselever med ulikt antall rette svar til oppgave 6.

Som leseren selv kan se er det svært få elever som har fått til alle oppgavene, det er langt flere som ikke har fått til noen, selv om dette tallet selvfølgelig tar opp i seg mange som hopper over ”alle” deloppgavene i denne gruppen. Etter dette er det igjen mer vanlig å få til 1 oppgave enn bare å få 1 oppgave feil, totalt sett er bildet at oppgavene falt vanskelig for elevene og at dette er et område der utvalgsgruppa er ganske usikker.

Bokstavbruk i geometrien.

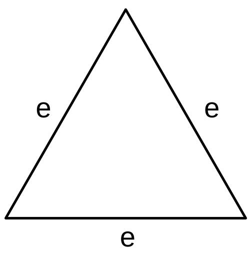
I denne oppgaven møter elevene variabler knyttet til geometri og som benevnelse på ulike sidelengder i ulike geometriske figurer. Slik så oppgaven ut i oppgavesettet:

Oppgave 11
Eksempel:
Dette kvadratet har sidene som er g meter lange.
Omkretsen kan vi da skrive som O = g + g + g + g =__________________



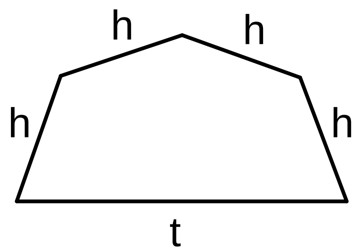
For alle figurene nedenfor er sidene oppgitt i meter.
Skriv omkretsen for hver av figurene:

a)



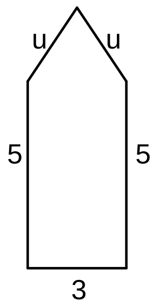
O = ______________________

b)



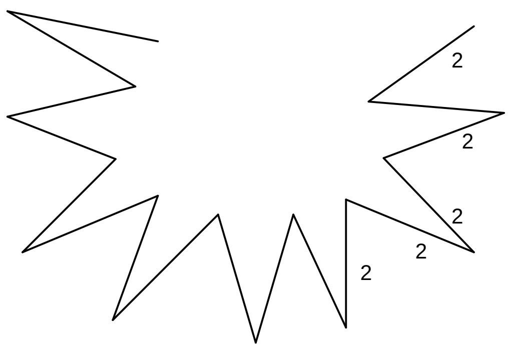
O = __________________________________

c)



O = ____________________________

d) **Deler av denne figuren er ikke tegnet.**
Det er n sider til sammen, som alle har lengde 2



O = ___________________________________

Oppgaven tester hvorvidt eleven evner å se sammenhengen eller relasjonen sidekant og tilhørende symbol, men også de prosedyremessige kunnskapene som skal til for å trekke sammen til et uttrykk er i fokus. Med tanke på i hvor stor grad oppgaver av denne typen dominerer i lærebokinnledningene til algebra for 8. trinn, burde dette på mange måter være kjent stoff for brorparten av elevene, men i KIM - studien (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000) omkring misoppfatninger blant grunnskolens elever i algebra, fant de at selv om løsningsfrekvensen for oppgave a var høy, så falt løsningsfrekvensen betraktelig utover i de andre deloppgavene og at oppgavene tydelig falt vanskelig for elevgruppen.

Det er fult mulig å løse oppgavene med en objektrelatert forståelse av variablene i oppgaven. Svarfordelingen i undersøkelsen gir for oppgaven følgende bilde:

Figur	Andel rette svar i prosent.		
	Alle	Andel av gutter	Andel av jenter
A	48	47	49
B	50	60	47
C	45	47	44
D	20	27	18

Figur 9,23: Utvalgets svarfordeling i prosent for oppgave 11 i undersøkelsen.

I deloppgave a er det 48 % av elevene i utvalget som svarer et riktig alternativ, mot 91 % i KIM (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000). Oppgaven ligger til slutt i prøvesettet, som nok var i lengste grad, noe som antagelig kan forklare en del av denne differansen. I tillegg er selvfølgelig en god del av de elevene som ikke har hatt matematikk i de siste årene som nok ikke husker så godt begreper som omkrets og hvordan man finner denne. Blant de elevene som har besvart oppgaven rett, er det 34 % som svarer det korrekte svaret 3e, mens 66 % oppgir det riktige, men ikke ennå sammentrukne uttrykket ”e + e + e”, å svare rett uten å trekke sammen var det for øvrig en svært liten andel av KIM - elevene som gjorde. Blant de elevene som kommer frem til uttrykket uten å trekke det sammen undres jeg over årsaken til dette, kanskje er det en innflytelse av at eksempelet i oppgavens innledning ikke er ferdig sammentrukket? Det er mulig at disse elevene i større grad betrakter variabelsymbolene som navn på sidekanter, et objekt, enn som de ukjente sidelengdene på figuren, eller er de kanskje usikre på regnereglene for variabeluttrykk?

Det mest typiske feilsvaret i fordelingen er e^3 som 22 % av elever oppgir at omkretsen er, mot kun 1% av landets 10.klassinger i KIM - studien. Disse elevene har tydelig fått med seg at omkretsen finnes med bakgrunn i de 3 sidekantene og deres lengde eller navn, men kjenner kanskje ikke til hvordan man finner omkretsen, eller de tror kanskje at ”e + e + e” kan kortes ned til e^3, med andre ord de kjenner ikke reglene for regning med variabler. En elev lanserer uttrykket ”g^3”, eleven ignorerer sannsynligvis variabelbokstaven oppgitt i figuren og bruker istedenfor bokstaven g som benyttes i oppgaveeksemplet. Et betydelig antall elever viser prosedyreusikkerhet i forbindelse med oppgaven.

Andre feilsvar som vises i fordelingen dreier seg om ulike kombinasjoner av variabelen e og eventuelt et tall, som i disse ”e + e”, ”4e•2” og e^4. Blant disse skiller forslaget ”e•h/2” seg ut, siden det her tydelig fremgår at det er arealformelen eleven benytter, eleven har tydelig god evne til å trekke ut riktig informasjon på bakgrunn av figuren, bare så synd det er omkretsen eleven egentlig er bedt om å finne.

Et par elever, om lag 3 %, oppgir ”3m” og ”3em” som svar på oppgaven, kanskje tenker den første av disse at hver av sidene er 1 meter og kanskje bruker den andre eleven m som meterbenevning inntil den korrekte lengden 3e. Muligens gjør bare begge elever en kobling mellom antall sider i trekanten og omkretsuttrykket, uten å tenke videre over de andre bestanddelene av sitt uttrykk. Noen få andre elever oppgir ulike tall som omkretsen på trekanten, mulig at de har målt de faktiske sidene i trekantfiguren og svart ut ifra det de da fant.

I oppgave b og c er det henholdsvis 50 % og 45 % som kommer frem til korrekt alternativ, mot 64 % og 56 % i KIM - studien, og igjen fordeler denne gruppen seg i to grupper. I b er det 43 % av de med rett svar som svarer på sammentrukket form ”4h + t”, mens de resterende 57 %, ramser opp algebrauttrykket ”h + h+ h + h + t” som svar på oppgaven. I c er de tilsvarende tallene 33 % og 67 %.

Det mest typiske gale svar i b er i først og fremst ”t + h^4”, igjen demonstrerer en del elever at de tror at potensuttrykket er identisk med å addere grunntallet dette antall ganger. Andre foreslåtte feilsvar i b dreier seg som i a om ulike kombinasjoner og sammentrekninger av oppgavens opplysninger som i svarene ”4ht”, ”4h”, ”h” og ”t + h^3”.

I oppgave c er det flere like populære gale svar, som for eksempel ”3 + 5^2 + u^2”, ”13 + u^2”, ”13uu” og noen andre kombinasjoner av de samme bokstavene og tallene. De gale svarene skyldes igjen muligens manglende forståelse for hvordan en kan finne omkretsen av de aktuelle figurene, manglende kunnskaper om hvordan en trekker sammen uttrykk med variabler, altså misoppfatninger i grunnleggende aritmetikk og til slutt manglende forståelse for hva hver av disse variablene representerer. Til begge oppgaven kommer enkelte elever med tallforslag, uten at det er noe enkelttall som i noen særlig grad går igjen.

I oppgave d er det kun 20 % av elevene som kommer fram til det korrekte uttrykket, mot 35 % i KIM – undersøkelsen (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000), men mange flere elever som på mange måter viser forståelse for hvordan mønsteret for veksten i oppgaven er med svar på formen ”2 + 2 + 2 + 2 + 2”. En del elever tenker åpenbart at figuren har et endelig antall sidekanter med 2 som lengde og kommer med svar som ”17•2”, ”36”, ”28”og ”40”. Disse elevene overser opplysningen om n antall sider gitt i oppgaven og oppgavens generelle karakter, og tenker mer kontekstavhengig eller konkret i tilknytning til den tegnede figuren i sitt forsøk på å løse oppgaven.

En del elever oppgir ulike uttrykk på former for kombinasjoner av potenser, 2 eller n som for eksempel 2 opphøyd i ulike tall ”2^27” eller ”2^15”, eventuelt n opphøyd i ulike tall ”n^13”, ”n^x” og ”n^2 + 34”. Disse elevene misforstår enten hvordan mønsteret utvikler seg eller de forstår ikke forskjellen mellom uttrykkene ”n•2” og” n^2”. Igjen ser vi stor forvirring blant elevene med hensyn til algebraens prosedyrekunnskap, det vil si hvordan en regner og trekker sammen algebrauttrykk, vi ser en tendens til å trekke sammen ved å samle alle impliserte variabler og tall i ett uttrykk uten + eller – tegn. I tillegg sliter en god del elever åpenbart med hvilke algebrauttrykk som passer til hvilken situasjon.

Fra algebraisk uttrykk til kontekst og omvendt

I den første delen undersøkelsens 10. oppgave møter eleven ulike situasjoner der det presenteres en sammenheng både retorisk og med et algebraisk uttrykk, og hvor elevene skal ta stilling til informasjonen i det algebraiske uttrykket. Oppgaven som er hentet fra heftet ”Veiledning til algebra” (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000) , men som ikke var en del av deres undersøkelse, er av mer strukturell karakter, da en del av oppgaven dreier seg om at elevene må avgjøre hvilke av ulike uttrykk som best beskriver sammenhengen som tidligere er beskrevet i ord. Slik fordeler elevenes oppfatning om dette spørsmålet seg:

Oppgave 10
Noen elever ble bedt om å oversette følgende sammenheng fra ord til symboler.
”Et rektangel er fem ganger så langt som det er bredt.”

Lisa skrev følgende uttrykk: l = 5 • b

Knut skrev følgende uttrykk: 5 • l = b

Ta stilling og velg utsagn	**Prosentandel elever**		
	alle	**Gutter**	**Jenter**
Lisa hadde funnet et godt uttrykk for sammenhengen	42	53	38
Knut hadde funnet et godt uttrykk for sammenhengen	33	13	40
Begge hadde funnet like gode uttrykk for sammenhengen	13	13	13

Figur 9,24: Svarfordelingen for utvalget til oppgave 10a i undersøkelsen.

Av utvalgets 60 elever har 7 hoppet over oppgaven, 3 av disse er gutter, jeg antar at det at elever gir opp oppgaven i større grad har sammenheng med en form for ”prøvetretthet” og at denne oppgaven inneholder mye skriftlig informasjon, enn med oppgavenes egentlige vanskelighetsgrad. Antagelsen gjør jeg fordi det var jeg som var sammen med elevene da de responderte på undersøkelsen og etter at gruppene hadde jobbet en stund kunne man nærmest se hvordan konsentrasjonen forsvant.

Et knapt mindretall av elevene som responderer på denne oppgaven i undersøkelsen velger det korrekte alternativet; Lisas utsagn. Verdt å merke seg er også at guttene utgjør en noe større andel enn sine 25 % av utvalget i den gruppen som velger det korrekte alternativet, over halvparten av alle guttene i undersøkelsen svarte korrekt på oppgaven.

Hele 20 elever eller 33 % av utvalget finner at Knuts utsag stemmer best med de gitte opplysninger, men her er guttene underrepresentert, 13 % av guttene, det vil si bare 10 % av de som velger dette alternativet, er gutter. I denne oppgaven kan en da se en tendens til at de guttene som tar seg bryet med å sette seg inn i oppgaven og svare på den, treffer bedre enn de jentene i utvalget som gjør det samme. Kanskje gjør flere av jentene et forsøk på oppgaven av ”pliktfølelse”, mens de av guttene som ikke raskt løser oppgaven i større grad hopper over den?

Når 1/3 av utvalget havner på å si seg enig med Knuts utsagn handler nok dette om at det å oversette fra vanlig norsk til algebra ikke er helt enkelt, fordi vi i vårt dagligspråk nevner ting i en annen rekkefølge en det som ofte er gjengs i matematikken. ”Direkte oversettelse” mellom norsk skriftlig språkdrakt og algebraisk symbolspråk ender dermed ofte, som med oversettelse mellom ulike andre språk, opp med en motsatt sammenheng enn det som tilfelle egentlig er. I denne forbindelse gir den direkte ”oversettelsen” av ”Et rektangel er fem ganger så langt som det er bredt.” algebrauttrykket ”5 • l = b”, og dersom elevene ikke er oppmerksom på denne forskjellen mellom dagligtale og algebra, det vil si klar over ”oversettelsesproblematikken” er det ikke underlig at de begår feil av denne typen.

Når 13 % av elever i utvalget ikke klarer å bestemme seg for hvilket alternativ som best beskriver situasjonen, er det tydelig at de ikke helt ser at de to algebrauttrykkene gir uttrykk for motsatte sammenhenger og at de ikke kan være korrekte samtidig. Noen av disse elevene føler kanskje at alternativet innebærer en helgardering, uansett klarer de ikke å trekke ut den ønskede informasjonen fra algebrauttrykkene, kanskje ikke fra teksten heller.

I oppgave 10b, 10c og 3 blir elevene på ulike måter utfordret på å gi innhold til skrevne bokstavsymboler. Hensikten er å se hvorvidt elevene forbinder bokstavsymbolet med et objekt eller om de mestrer å se at bokstavsymboler skjuler en verdi, en størrelse. I 10b møter elevene følgende utfordring:

En sammenheng er beskrevet slik:
”I en klasse er det dobbelt så mange øyne som neser.”

Ola beskrev sammenhengen slik: 2 • Ø = N
Hva står bokstavene for?

Ø…………………………………………………..

N………………………………………………

I svarfordelingen i undersøkelsen finner vi at 55 elever eller 92 % besvarer denne oppgaven med objektene øyne og nese som forklaring på bokstavsymbolene, ingen elever skriver i sin besvarelse at antall øyne og antall neser er forklaring på bokstavsymbolene, mens 5 elever hopper over oppgaven. I ettertid ser jeg at oppgaven i litt liten grad skiller elevene, for det kan selvfølgelig hende at flere av de elevene som her oppgir objektene øyne og nese, i en klassesituasjon, samtale eller dersom de skulle velge mellom alternativet antall øyne eller øyne ville velge rett forklaring til bokstavsymbolet.

Siden oppgave 10c og 3 er så like i formen vil jeg i denne behandlingen se på dem samtidig, med utgangspunkt i svarfordelingene. Siden elevene møter oppgave 3 tidligere i undersøkelsen og det dermed er slik at flere ”har krefter” til å forsøke seg på den, vil en vente seg noe ulikhet i fordelingen. Svarene på oppgave 3 er interessante også fordi denne oppgave har vært utprøvd i tidligere forskningsstudier. I oppgave 3 er utfordringen til eleven å gi en matematikkfortelling, en kontekst, til et algebraisk uttrykk.

Oppgave 3.

Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket:
3a + 2a = 5a

……………………………………………………………………………………….

I oppgave 10c er utfordringen også å gi en regnefortelling til et algebrauttrykk.

10c) Lag en regnefortelling
N = 3 • b

……………………………………………………………

Av de 60 elevene i utvalget er det 32 % som hopper over oppgave 3, kanskje forstår de ikke hva de blir bedt om å gjøre. Det tilsvarende tallene for oppgave 10c er på 60 % av elevene. Det er verdt å merke seg at blant dem som hopper over oppgaver befinner det seg flere elever som får til mange av de andre oppgavene i settet, som viser god prosedyremessig kunnskap, så for deler av elevgruppa ser de ut til at oppgavetypen er helt ukjent. For oppgave 3 og 10c fordeler svarene seg slik, i følgende kategorier og jeg har lagt til svarfordelingen for oppgave 3 fra KIM - studien også i denne tabelloversikten:

Type forklaring	Prosentandel i 3	Prosentandel i 10c	Prosentandel til 3 i Kim-studien
Ubesvart	32	60	31
God kontekst – rett svar	3	27	7
A er konkret objekt	52	8	27+13
A er udefinert objekt	10	0	7
Teknisk forklaring	2	2	7
Meningsløs	2	3	-

Figur 9,25: Svarfordelingen i prosent for oppgave 3 og 10c i undersøkelsen, og for tilsvarende oppgave i KIM - studien (Brekke, Grønmo, Rosen, 2000).

Som leseren kan se, er løsningsprosenten igjen noe høyere i Kim-studien enn i mitt utvalg og de ulike kategoriene med ulike feilsvar i stor grad like. I gjennomgangen av de nasjonale tallene skiller forskerne mellom ”a står for et konkret objekt” og ”a står for et selvstendig objekt”, jeg har i liten grad skilt mine respondenter ut ifra denne grenseoppgangen og har for enkelhetsskyld derfor lagt disse to kategoriene sammen i tabellpresentasjonen av Kim-tallene.

Av de 41 regnefortellingene elevene laget til uttrykket i oppgave 3, er det kun 1 eller 2 %, som er meningsløs i den forstand at historien ikke på noen som helst måte passer til uttrykket, mens det tilsvarende tallet for oppgave 10c med uttrykket ”N = 3 • b” er 2. Et eksempel på hva jeg mener med meningsløst regnefortelling kommer her.

3 menn la på seg og ble fete (B brede) så de meldte seg inn i en klubb om kosthold og næring

Elevsvar 11: Elevens regnefortelling til ”N = 3 • b”.

Eleven har en objektorientert forståelse av bokstavsymbolet, b blir forkortelsen for begrepet bred og n for næring, men eleven makter ikke å skape et meningsfylt utsagn i matematisk forstand. ”Oversettelsen” av likhetstegnet og multiplikasjonstegnet inn i ordinær språkdrakt er på mange måter fraværende og i den grad en kan se noen språklige spor av dem tilsvarer disse i liten grad noe matematisk innhold. At en blir fet / bred og dette fører til ny fokus på kosthold og næring, har for eksempel lite med både likhetstegnets prosessaspekt og likevektaspekt.

I kategoriseringen av regnefortellingens karakter måtte jeg utøve en del skjønn, særlig i fortellinger til oppgave 10c der det var langt flere fortellinger som lå i grenseland mellom det å bruke variabelen som et bestemt objekt og det å bruke variabelen som en størrelse. Kun 2 elever kommer med regnefortellinger til oppgave 3 der variabelen representerer et tall, enten som ukjent størrelse eller antall. Dette tallet er som nevnt mye høyere for oppgave 10c der flere elever kommer med godkjente regnefortellinger, noe som overrasket meg noe, men jeg tror det kan ha sammenheng med at algebrauttrykket i mindre grad passet til de tradisjonelle appelsinforklaringene. Flere av fortellingene er som sagt i grenseland, som denne til oppgave 10c:

Berit har 38 klinkekuler. [redacted] Nils har 3 ganger så mange som Berit hvor mange klinkekuler har Nils

Elevsvar 12: Elevens regnefortelling til ”N = 3 • b”.

Eleven gjør gjennom sitt eksempel det klart at variablene representerer størrelser, samtidig som eleven på en annen måte bruker bokstavene n og b som forkortelse for navnene til sine egne eksempler, altså menneskene eller objektene i historien.

Til oppgave 3 dominerer regnefortellinger der variabelsymbolet fortolkes som et konkret objekt, hos veldig mange av elevene dreier det seg om objekter som har a som initial i betegnelsen, som appelsiner, aviser, apekatter, og vi kan på tross av feil førstebokstav ta med epler i samme slengen. Bokstavsymbolet forstås på sett og vis som en forkortelse.

Det var en gang 3 aper i et bur men så
kom det 2 til i buret. Hvor mange aper
er det i buret nå?

Elevsvar 13: Elevens matematikkfortelling til ”3a + 2a = 5a”

I oppgave 10c dominerer ikke de konkrete objektene på samme måte elevenes regnefortellinger, selv om mange elever også her gjør bruk av begreper med l og b som førstebokstav, så kommer det mer tydelig frem i de fleste oppgavene at vi forholder oss til enn eller annen størrelse, gjerne en lengde, kostnad eller antall av et eller annet, som for eksempel antall presanger i hver av Nissefars gavesekker.

En vanlig misoppfatning i regnefortellingene til oppgave 3 er elever som kommer med en fortelling om a`er på et eller annet vis, elevene betrakter tydeligvis bokstavsymbolet i seg selv som et objekt, som kan gå på tur, bli sint og sur.

Det var en gang 3 a'er som var ute å gikk,
på vegen møtte di 2 a'er til. De slo følge
på turen og endte opp med å være 5 a'er
til sammen.

Elevsvar 14: Elevens matematikkfortelling til ”3a + 2a = 5a”

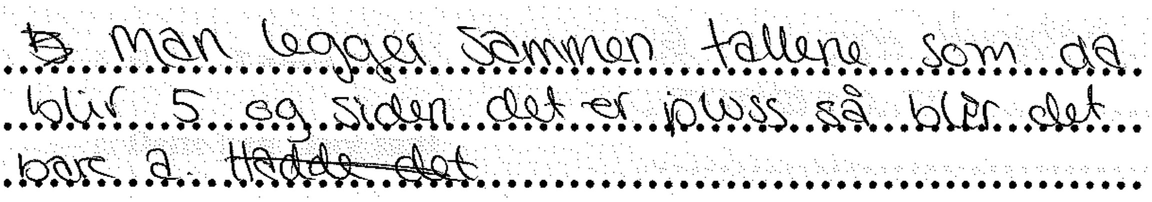
En regnefortellingsvariant som jeg opplever er i grenseland mellom variabelen forstått som representant for et konkret objekt og denne objektiviseringen av selve bokstavsymbolet, er følgende historie.

Det var 3 ukjente ting som ville bli sammen
med 2 andre ukjente ting. Da de ble sammen
var de ikke 2 + 3 ukjente men tilsammen 5 ukjente
ting.

Elevsvar 15: Elevens matematikkfortelling til ”3a + 2a = 5a”

Eleven forstår tydelig bokstaven som symbol, som representant for noe ukjent og ikke som forkortelse, men samtidig er det for henne en representant for en ting, ikke en størrelse.

Til begge oppgavene er det 1 elev som misforstår og ikke kommer med noen forklaring til hva variabelen er. Eleven benytter istedenfor anledningen til å gi en teknisk forklaring på hvordan en gjør disse beregningene.


Man legger sammen tallene som da blir 5 og siden det er pluss så blir det bare a. ~~Hadde det~~

Elevsvar 16: Elevens matematikkfortelling til ”3a + 2a = 5a”

Elevens prosedyremessige forklaring på hvordan sammentrekkingen av de 2 uttrykkene skal foregå, viser at eleven først ignorerer variabelen, for etter å ha summert tallene, og så setter inn igjen variabelen a i sluttsvaret.

At mange elever tenker om variabelen som enten et objekt i seg selv eller en representasjon for et objekt, støttes også, som leseren selv kan se, av funnene i flere av de andre oppgavene i undersøkelsen.

De ulike misoppfatningene funnet i dette utvalget stemmer i stor grad sammen med funnene i Kim-prosjektet på sammenliknbare oppgaver, noe som er verdt å merke seg siden det i de seneste lærebøker er lagt stor vekt på å presentere algebraen slik at en skal unngå nettopp disse misforståelsene og feilforestillingene.

Sammenhengen mellom prosedyremessig og strukturell forståelse.

Avslutningsvis i denne gjennomgangen vil jeg forsøke å se på sammenhengen mellom utvalgselevenes prosedyremessige ferdigheter og relasjonsforståelse eller strukturelle forståelse av oppgavene. For å kunne finne ut noe om denne sammenhengen deler jeg oppgavene inn i 2 kategorier, som jeg kaller prosedyremessig og strukturell kunnskap eller forståelse. Denne kategoriseringen innebærer selvfølgelig en forenkling av dataene, da flere av oppgavene ikke hører så entydig inn under en av kategoriene, og da skillet mellom de to kunnskapstypene ikke så klart siden strukturell forståelse av et fenomen gjerne bygger på og forutsetter prosedyremessig forståelse, og siden prosedyremessig ferdigheter på ett nivå forutsetter strukturell forståelse på et annet, gjerne tidligere, nivå. Eksempelvis forutsetter prosedyremessig korrekt behandling av uttrykkene i undersøkelsens 6 oppgave, korrekt innsetting eller relasjonell forståelse, oppgaven tester dermed på mange måter de to kunnskapstypene samtidig.

I oppgavesettet har jeg definert følgende oppgaver som oppgaver som først og fremst tester prosedyremessig forståelse:

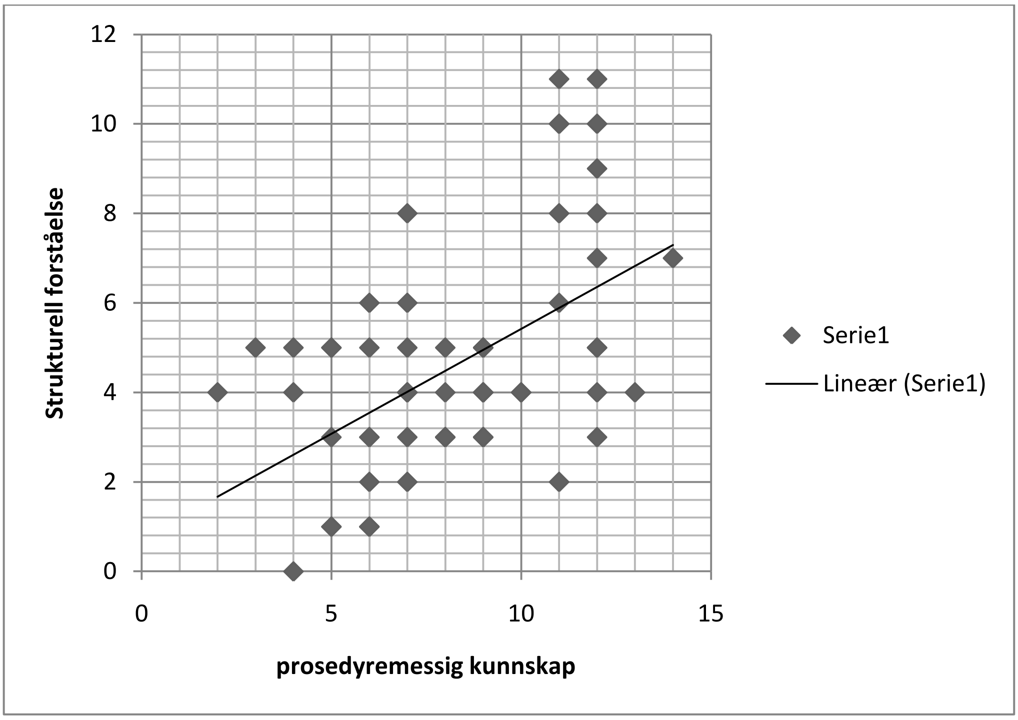
- 1, oppgavene tester først og fremst prosedyremessige ferdigheter fra aritmetikken.
- 4, oppgavene tester elevenes evne til å trekke sammen uttrykk. De som har endt med feil svar, har i all hovedsak begått feil i sammentrekningen av ledd i det algebraiske uttrykket.
- 5, oppgavene tester elevens evne til å legge sammen tall og algebraiske uttrykk. Og, selv om vi forholder oss til stykket på et veldig generelt plan, så er det en tendens at de får feil svar, gjør feil i behandlingen av det algebraiske uttrykket.
- 7a-7d, oppgavene tester evne til å sette inn og summere. De fleste som har gjort feil, setter inn feil i uttrykket eller trekker feil sammen, mange kjenner åpenbart ikke til korrekte prosedyrer i behandlingen av stykkene. Oppgaven er noe i en gråsone da evne til å sette inn korrekt nok også kan tenkes å måle kunnskap av mer strukturorientert karakter.
- 11a-11c, oppgavene tester prosedyrekunnskap fra geometrien, forståelsen omkring relasjonen bokstavsymbol og sidelengde, samt evne til sammentrekning av algebraiske uttrykk. Da de fleste som har fått feil svar på oppgaven, tilsynelatende har gjort galt i sin sammentrekning av uttrykket, mer enn i sin fortolkning av relasjonen mellom sidekant og bokstavsymbol, velger jeg å legge oppgaven i prosedyrekategorien, men det kan selvsagt hevdes at den tilhører en gråsone og at de elevene som hopper over den har relasjonelle og strukturelle vansker mer en prosedyremessige.

På den andre siden har jeg kategorisert følgende oppgaver som oppgaver av strukturell karakter:

- 2, rett svar selvfølgelig avhengig av prosedyre men ikke en spesifikk algebraprosedyre, vesentlig for å komme frem til korrekt svar er å gripe eller begripe problemet, samt gjennomskue det generelle mønsteret.
- 3, her testes det hva elevene knytter til eller forstår av bokstavsymbolet, og evnen til å sette uttrykket i en sammenheng.
- 6, fokuset er på de generelle sammenhenger, hvorvidt elever har forstått likhetstegnets betydning og hva symbolene representerer.
- 7e, utfordringen er å gå fra retorisk informasjon til algebraisk uttrykk.
- 9, denne oppgaven kunne på mange måter også vært en test på elevenes evne til å sette opp og løse likninger, men nå har elevene i all hovedsak ikke brukt likningsprosedyrer for å løse oppgaven. De som har klart å løse oppgaven har grepet sammenhengene i oppgaveteksten, uten at de har representert disse i algebraisk språkdrakt. Elevenes poengsum på oppgaven speiler på mange måter dermed evnen til å forstå problemet og sammenhengen, derfor har jeg valgt å kategorisere denne slik.

- 10, fokuset ligger på bokstavsymbolets innhold, overgangen fra tekst til algebrauttrykk og evne til å hente informasjon ut av gitt algebrauttrykk, altså måler oppgaven kunnskap som i liten grad kan kategoriseres som prosedyrekunnskap.
- 11d, fokuset er på generell sammenheng, relasjonen uttrykk og figur eller situasjon.

Kategoriseringen er som sagt en forenkling av virkeligheten, skillet mellom oppgaver som fanger prosedyremessig og strukturell kunnskap er ikke så klart som min kategorisering kan gi bilde av. Om vi ser på sammenhengen mellom de 2 ulike formene for kunnskap, bildet som denne inndelingen av oppgaver gir:



Figur 9,26: Korrelasjonen mellom samlevariablene som representerer prosedyremessig og strukturell kunnskap.

Som fremstillingen viser er det en tendens i utvalget til sammenheng mellom de 2 ulike formene for kunnskap, slik Anna Sfard hevder i sin forskning. Korrelasjonen er på 0,52 så noen sterk, absolutt eller entydig sammenheng er det ikke tale om. For utvalget gjelder det at de i snitt har bedre prosedyremessig forståelse enn forståelse av mer strukturell karakter, snittet ligger på 55 % poengoppnåelse på oppgavene av prosedyremessig karakter, mens tallet for oppgaver av strukturell karakter er 38 %. Plottet viser at i hvert fall i dette utvalget er gode prosedyremessige ferdigheter eller kunnskaper en forutsetning for høyere strukturell forståelse, selv om vi kan se enkelt elever som tydelig har bedre strukturelt grep om emnet, enn prosedyremessige ferdigheter. Denne hovedtendensen ser ut til å holde seg, selv om en fjerner for eksempel oppgave 7a-d eller 11a-c, som ikke så klart hører hjemme i en av kunnskapskategoriene. Alt i alt kan en se at en god del av elevene i utvalget demonstrerer både en lav strukturell og prosedyremessig forståelse, og at det ikke er noen elever som har høy strukturell forståelse kombinert med veldig lav prosedyremessig forståelse, mens det er elever i utvalget som har høy prosedyremessig kunnskap, kombinert med lav strukturell forståelse.

En oppsummering.

Svar på spørsmål ved reisens ende.

Hensikten med dette mastergradsarbeidet var først og fremst å vinne mer kunnskap om følgende problemstillinger;

- Hvordan tenker elever i ulike typer av algebraoppgaver?
- Hva tenker elever om emnet algebra?

Problemstillingene er forsøkt belyst gjennom en kombinasjon av studier av tidligere matematikkdidaktiske undersøkelser, forskning og teorier, samt en analyse av en undersøkelse av et utvalg elever og deres respons på ulike spørsmål og påstander knyttet til temaet algebra og deres løsning av ulike typer algebraoppgaver. Nå er begrepet elever ikke en entydig størrelse og ei heller en enhetlig gruppe som tenker likt om algebra. I den videre oppsummeringen vil det derfor være slik at jeg kan peke på de typiske tendensene med hensyn til begge problemstillinger, i mitt utvalg, og gjerne påpeke likheter og ulikheter med henblikk på andre undersøkelser og studier. Problemstillingene har således ikke entydige enkle løsninger, men masteroppgavene har forsøkt å peke på og vise, noen av de måtene elever tenker i algebraoppgaver på og noe av det, elever tenker om algebra.

Hvordan tenker elever i ulike typer av algebraoppgaver?

Utvalgselevene demonstrerer i sine oppgaveløsninger de fleste kjente misoppfatninger knyttet til tema algebra og i alle oppgaver som er hentet fra nasjonalt læremiddelsenters algebraundersøkelse, Kim-studien, (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), finner jeg i utvalget en tendens til likt mønster med hensyn til prosentandelen korrekte svar på oppgaven og graden av popularitet til ulike gale svar, som svarer til ulike kjente feilforestillinger og gale løsningsmetoder. Dette på tross av at utvalgsgruppa har en tendens til noe lavere løsningsskår enn hva man fant i den opprinnelige Kim-studien og en kan kanskje se en liten tendens til at utvalgselevene i ennå større grad foretrekker ulike former for sammentrekninger av alle involverte bokstaver og tall som oppgaveløsninger, enn hva landets 10.klassinger gjorde i den aktuelle undersøkelsen. Funnet er på en måte ikke overraskende med tanke på at utvalget består av elever som ikke har valgt matematikk som fordypningsfag i videregående skole, men allikevel verdt å merke seg, da disse typiske misoppfatningene er bevisst forsøkt unngått i nyere læreplaner og lærebøker.

Min undersøkelse avdekker i så måte at misoppfatninger er utbredt, i den forstand at elevene gjør de tradisjonelle feilene, men etter svarbehandlingen sitter jeg igjen med et inntrykk av at usikkerhet med hensyn til regnemetode og regneregler er en vel så god beskrivelse av elevenes tanker i algebraløsning, som begrepet misoppfatning i betydningen en forholdsvis fast og stabil gal forestilling. Mange av elevene gir i oppgavedelen av undersøkelsen, uttrykk for usikkerhet omkring egen løsningsmetode og viser i liten grad konsekventhet i forhold til bruk av gale løsningsmetoder, for eksempel i sammentrekning av algebrauttrykk. Analysen av undersøkelsen viste også at det var få elever som mestret alle oppgavene innenfor et tema eller en bolk, så misoppfatninger forstått som mangelfullt utviklet kunnskaper og forståelse i emnet er en dekkende beskrivelse av majoriteten av elevenes tanker i algebraundersøkelsens oppgavedel. De aktuelle elevene har nok i tidligere skolegang lært formelle algoritmer for løsning av algebraiske problemer, samtidig som de i liten grad har fått den grunnleggende forståelsen for emnet som gjør at en på bakgrunn av problemforståelsen kan finne egnede strategier for å løse problemer. Med noe av Piagets (Imsen, 1999) språkbruk ville vi kanskje kunne si at mange av elevene har, mer eller mindre vellykket, memorert kunnskapsskjemaer uten at disse strukturelt er blitt satt i sammenheng med hverandre, kunnskapen er blitt fragmentert og lite anvendelig, noe som gjør den lettere å glemme.

Funnet, sammen med elevenes egne utsagn med hensyn til hvordan man best lærer algebra, kan tyde på at for mange av disse elevene dreier det å kunne algebra seg om å huske regler og metoder. Undersøkelsen avdekker således et veldig prosedyreorientert eller instrumentelt syn på algebra eller oppfatning omkring algebra hos mange av elevene, noe som kanskje speiler tidligere lærere og lærebøkers behandling av emnet. Metodene mer enn problemet er utgangspunktet for mange av elevene i oppgaveløsning, slik den tradisjonelle lærebokstrukturen med hensyn til pensumpresentasjon ofte har hatt som utgangspunkt å presentere en regel, for så å gi øvelser til denne regelen.

Om en skal kategorisere tenkemåten for elevene i mitt utvalg vil Masons (1996) begrep ”retorisk algebra” eller ”synkopert algebra” på mange måter være dekkende for en god majoritet. Elevene som gruppe kjenner godt til den symbolske algebraen, men selv for de flinkeste elevene i utvalget, som demonstrerer forholdsvis greie ferdigheter med henblikk på innsetting av variabelverdier eller mer instrumentell bruk av det algebraiske symbolspråket, er retoriske fremgangsmåter foretrukket i oppgaveløsning og i representasjon av algebraiske problemer.

På oppgaver som dreier seg om å gi et algebraisk uttrykk en form for kontekst, demonstrerer en stor andel av elevgruppen en relativt objektrelatert variabelforståelse, de anvender bokstavvariabelen som en forkortelse og ikke som en representant for en størrelse, og dette blir særlig tydelig når bokstavvariablene ikke så enkelt kan knyttes til en geometrisk størrelse. Funnet viser viktigheten av å tydeliggjøre i skolens algebraopplæring, at bokstavsymbolet må representere størrelser, også dersom vi knytter bokstavsymbolene til geometriske størrelser eller benytter dette i formler. Når vi bruker bokstavsymbolet l for å representere lengder i formler er det størrelsen på lengden dette bokstavsymbolet representerer, ikke selve objektet.

En stor andel av elevene sliter også med å representere algebraiske problemer i form av algebrauttrykk, selv om flere elever viser at de kjenner til at vi kan representere ukjente størrelser ved hjelp av bokstavvariabler. I tallgåtene i undersøkelsens oppgave 9, en oppgave som ikke var med i Kim – studien (Brekke, Grønmo, Rosèn, 2000), opplever jeg at det er et påfallende funn at samtlige elever som har forsøkt seg på å representere algebraproblemet i form av algebraiske uttrykk har strandet i løsningsforsøket, mens de elevene som har stolt på egne mer uformelle løsningsmetoder, i større grad har løst utfordringen. Nå kan det jo selvsagt være at elevgruppa som løste utfordringen i dette problemet også ville klart å sette opp og representere problemet i mer egnede likninger enn sine medelever, men de foretrakk altså mer retoriske metoder i sin oppgaveløsning. Gode retoriske ferdigheter synes dermed å være en forutsetning for å kunne endre representasjonsform med henblikk på et problem av algebraisk karakter. Eksempelet demonstrerer således viktigheten av å undervise for å skape relasjonell forståelse mer enn instrumentelle ferdigheter.

Å betrakte bokstavsymboler som generaliserte størrelser, løsrevet fra konkret kontekst, viser seg å være svært fremmed for elevene i undersøkelsen og usikkerheten med hensyn til hvilke regler som gjelder, er påfallende stor, faktisk gir mange elever i undersøkelsespapirene uttrykk for nettopp dette. Mange elever demonstrerte i denne forbindelse også en oppgitthet over det de oppfatter som vilkårlighet i algebraisk uttrykksbehandling, sammen med at de demonstrerte en svært begrenset forståelse av likhetstegnets betydning og tydelige misoppfatninger knyttet til forestillingen om likningsløsning som ”flytt og bytt metode”. Slik mange lærere opplever at elever har mye større problemer med å forholde seg til variabelbruk i funksjonsuttrykk enn i likningsløsning, viser også disse elevene en større fortrolighet med variabelen som representant for det ukjente enn som representant for generelle størrelser. Oppgavesettet mangler oppgaver som i større grad ser på symbolbruk i funksjonssuttrykk, men jeg vil påpeke at flertallet av elevene i undersøkelsen, for ikke å si alle, viser en begrenset variabelforståelse, mer på linje med variabelforståelsen i algebraens retoriske eller synkoperte epoke, enn den mer moderne variabelforståelsen i algebraens symbolske periode.

Med å kategorisere oppgavene i undersøkelsen ved å bruke det todelte begrepsparet til Anna Sfard (1992) som verktøy, ”strukturell kunnskap” og ”operasjonell kunnskap”, har jeg i analysen av undersøkelsen funnet en tendens til at god prosedyremessig forståelse og ferdigheter henger sammen med gode strukturelle kunnskaper og ferdigheter. I utvalget totalt sett er det få elever som viser gode strukturelle ferdigheter, og alle elevene som skårer relativt sett bra på oppgaver av strukturell karakter viser også greie operasjonelle ferdigheter. Mens andelen elever med grei prosedyremessig forståelse ser ut til å være høyere, og ikke like avhengig av elevens skår med hensyn til oppgaver av mer strukturell karakter. I mitt utvalg kan en altså se en tendens til at god operasjonell forståelse ligger til grunn for god strukturell forståelse, og at majoriteten av elevene i liten grad har fått utviklet god strukturell algebraforståelse.

Hva tenker elever om emnet algebra?

Oppgavens tittel er ”Møte med X – dagens latin? En studie av elevers tanker i og om algebra”. Min antagelse i masterarbeidets innledning, referert til i episodene innledningsvis, var på mange måter at emnet ofte oppleves som unyttig, unødvendig vanskelig og lite relevant for mange av elevene. På mange måter bekrefter undersøkelsen dette inntrykket, utvalgselevene oppgir at emnet er vanskelig og at de har lite bruk for det, at de i liten grad liker eller er interessert i det, og de oppgir i liten grad å ha lyst å jobbe med algebra. Som gruppe mener de bestemt at deres egne foreldre i liten grad nyttegjør seg av algebra i arbeidsliv og hverdag, og oppgir selv en svært eksamensfokusert motivasjon for faget.

Elevene oppgir som gruppe at emne ikke har endret deres forhold til faget, så den store misnøyen, de veldige aversjonene virker elevutvalget ikke å ha, selv om flere av disse aspektene er verdt å ta tak i for politikere, lærebokforfattere og lærere i fremtidens matematikkundervisning.

Noen interessante kjønnsforskjeller i svarene på denne delen av undersøkelsen som jeg vil trekke frem er tendensen til at de ulike kjønnene ser ut til å vektlegge ulike strategier som fruktbare for algebrainnlæringen, der ”flid” og ”hardt arbeid” som for eksempel å gjøre lekser settes opp som gode læringsmåter av jentene i utvalget, slik en også har sett i andre undersøkelser (Streitlien, Wiik, Brekke, 2001), ser en, en tendens til at guttene i større grad fokuserer på refleksjon og grubling. Guttene i dette utvalget, ser altså ut til å ha et noe større fokus på den uformelle refleksjonen omkring et tema, på en form for retorisk algebra enn hva jentegruppa i utvalget oppgir at de har. Denne tendensen ser en også i vurdering av hvor viktig klassesamtalen og tavleundervisning er i algebrainnlæringen, igjen er det slik at guttene foretrekker disse mer muntlige (retoriske) tilnærmingene, mens jentene oppvurderer jobbing med læreboka. Satt på spissen foretrekker utvalgsjentene kvantitet, kanskje vi kunne si utvikling av prosedyremessige ferdigheter, mens guttene i større grad går for noen få problemer, men jobber med å utvikle den strukturelle forståelsen av disse. Kanskje kunne vi si at guttene viser frem et noe mer konstruktivistisk læringssyn enn hva jentene i utvalget viser, selv om utvalgsguttene også vurderer det å jobbe med regler og løsningsmetoder som noe mer effektivt i algebrainnlæringen enn hva jentene oppgir.

Utvalgselevene oppgir i liten grad å oppleve algebra som et nyttig verktøy i oppgaveløsning, men tanke på hvordan flertallet ikke løser oppgave 9 når de representerer denne i algebraisk språkdrakt, kan man heller helle mot at for flertallet av elevene oppleves algebra som et tilleggshinder i problembehandlingen. Dette er verdt å legge merke til da nyttighet ofte trekkes frem som en motiverende faktor for å lære et emne eller fag, og kanskje særlig i matematikken. En kjønnsforskjell i utvalget, som er verdt å merke seg, er ulik vurdering med henblikk på graden av nytteopplevelse av emnet utenfor matematikktimene, jentene oppgir å ha større nytte av algebra utenfor matematikkfaget enn det guttene oppgir og omvendt, guttene oppgir å ha større nytteverdi av algebra i matematikkfaget enn det jentene oppgir. Samtidig oppgir guttene i noe større grad at de opplever emnet som vanskelig enn hva jentene gjør og at emnet har endret deres forhold til faget, en opplevelse jentene ikke deler. Svarene er interessante sett sammen, særlig på bakgrunn av at utvalgsguttene som opplever algebra noe vanskeligere, mer refleksjonspreget, ”fagopplevelsesendrende” og nyttig i timene, jo skårer noe bedre på oppgavedelen av prøva. Det er verdt å minne om utvalgets lave størrelse og skjeve sammensetning, som gjør at en i liten grad kan trekke slutninger omkring slike kjønnsforskjeller i befolkningen, på bakgrunn av studien. På dette punktet kunne det nok vært undersøkt bredere og mer systematisk for å si noe mer sikkert.

Utvalgsguttene er som tidligere vist, klart uenig i at algebra er noe av det de liker minst i matematikkfaget. Resultatet er interessant sett opp imot guttenes opplevelse av at algebraen har endret deres forhold til matematikken og at de samtidig opplever at algebraoppgaver er vanskeligere enn andre oppgaver, kanskje de rett og slett opplever at i algebraen får de noe å bryne seg på og at dette er en positiv opplevelse.

Veien videre.

I ettertid ser jeg at mastergradsarbeidet har belyst en del spørsmål, deriblant oppgavens problemstillinger, men reist flere nye spørsmål. Det er mange flere aspekter det kunne vært interessant å finne ut mer om;

- Hva legger de elevene som oppgir at algebra har endret deres forhold til matematikken i sitt svar?
- Hvordan ville korrelasjonen mellom denne undersøkelsen med diagnostiske oppgaver korrelere med en "ordinær" matematikkprøve i algebra – ville elevskårene fordele seg likt?
- Hvordan kan enkeltelever oppgi at emnet er enkelt og samtidig skåre dårlig på prøvedelen av undersøkelsen?
- Hvorfor mener elevene som de gjør med hensyn til hva som er gode læringsstrategier i emnet?
- Hvorfor besvarer elever ulike spørsmål og påstander slik de gjør og finnes utvalgstendensene også i mer representative utvalg?
- Hvordan endrer elevers oppfatning og interesse for faget seg over tid?
- Hvordan slår ny læreplan og nye lærebøker ut med henblikk på elevers tanker i og om algebra?
- Hvordan lede elever til full symbolsk forståelse av algebra?

I elevsvarene i min undersøkelse kan en se mange hindre som må overkommes for å hjelpe elever mot en bedre algebraforståelse og heve kvaliteten på matematikkundervisningen i skolen. Noen av disse hindrene knyttet opp imot elevers tanker i løsning av ulike algebraoppgaver kan kanskje overkommes med gode forklaringer og oppgaver i selve temaet, bedre og mer tilrettelagte læreplaner og lærebøker. Vanskeligere å få endret er kanskje elevenes holdninger eller tanker om algebraen og faget forøvrig, men for å hindre algebraen å lide latinens skjebne med hensyn på elevenes oppfatning om emnet, er det muligens påkrevet.

Litteraturliste

Aase, L. (2005). Borgerskolene – spydspiss for allmenndanningen. Artikkel i ”Skolen..: Årbok for norsk utdanningshistorie”. Notodden: Stiftelsen.

Andersen, A. (1963). Oppgavesamling til Regnebok for framhaldsskolen og ungdomsskolen. Oslo: Tiden norsk forlag.

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present and Future. I Journal of Mathematical Behavior, 14. Study group for Mathematical Behavior

Arntsen, F.(1998). Lærerskolestudentenes kunnskaper i matematikk. Hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk. Høgskolen i Agder.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Befring, E. (1997). Læring og skole. Vilkår for et verdig liv.(2. opplag 1997). Oslo: Det norske samlaget.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. The Journal of Mathematical Behavior, 14. Study group for Mathematical Behavior.

Bell, A. (1996). Problem-Solving Approaches to Algebra: Two Aspects. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Bell, A. (1993). Principles for the Design of Teaching. I Educational studies in Mathematics 24. Kluwer Academic Publishers.

Bjørnstad, A. (2002). Algebra I den videregående skolen. En studie av elevers forståelse på grunnkurset, studerettning for allmenne, økonomiske og administrative fag. Hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling – A theory for practice. I Clarke, B., Clarke, D., Emanuelson, G., Johansson, B., Lambdin, D.V., Lester, F., K., Wallby, A. & Wallby, K. (red). International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Göteborg: National Center for mathematics education.

Bonnevie, J. A. og Eliassen, A. (1957). Lærebok i Aritmetikk og Algebra. (26.opplag 1958). Oslo: H. Aschehoug & Co.

Breiteig, T., Pedersen, P., I. & Skoogh, L.(1993). Regnereisen 8a. H. Oslo: Aschehoug & Co.

Brekke, G. (1994). Funksjonar i skulematematikken. Ein gjennomgang av problemområdet. Telemarkforskning-Notodden.

Brekke, G. (2000). Forskning på omgrepsdanning i matematikk. Konsekvensar for arbeidsmåtar i lærarutdanninga. Forskningsrapport for Telemarksforskning, Notodden.

Brekke, G., Grønmo, L. S. & Rosèn, B. (2000). Veiledning til algebra. F, H og J. Nasjonalt læremiddelsenter.

Chazan, D. (1996). Algebra for All Students. I Journal of Mathematical Behavior, 15. Study group for Mathematical Behavior.

Christoffersen, H. (1954). Regning og matematikk i realskolen. En detaljert og systematisk oversikt over pensum. Oslo: Fabritius & sønners forlag.

Clausen-May, T. (2005). Teaching Maths to Pupils with Different Learning Styles. London: Paul Chapman Publishing.

Coward, D. (1941). Samfunnsregning for realskolen. Oslo: H. Aschehoug & Co.

Djivers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunesties. ZDM vol. 34

Djivers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunesties. Utrecht: Utrecht University.

Edwards Jr., C., H. & Penney, D., E. (1982). Calculus with Analytic Geometry. (4. edition 1994). New jersey: PRENTICE HALL INTERNATIONAL EDITIONS.

Ekornes, K. B. og Holst, F. R. (1970). Forsøkstekst i moderne matematikk for 7. -9. klasse. Algebra del 1 og geometri for 8. klasse. Trondheim: Forsøksrådet for skoleverket.

Erstad, G.& Bjørnsgård, I. (1987). Matematikk 3MN. (4. opplag 1992). Oslo: H. Aschehoug & Co.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). Educational algebra. A Theoretical and Empirical Approach. Springer.

Gudbrandsen, A., Holme, F. K. og Solvang, R. (1972). Moderne matematikk 1. Oslo: J. W. Cappelens Forlag.

Gudbrandsen, A., Holme, F. K. og Solvang, R. (1972). Moderne matematikk 2. Oslo: J. W. Cappelens Forlag.

Gudmundsen, J. (1960). Eksamensoppgaver I regning for framhaldsskolen. (2. opplag). Oslo: Fabritius & sønners forlag.

Gulbrandsen, J.E. &, Melhus, A. (1997). Mega 8a. Matematikk for ungdomstrinnet. NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J.E. &, Melhus, A. (1997). Mega 8b. Matematikk for ungdomstrinnet. NKS-Forlaget.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). Nye Mega 8a. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. utgave, 1. opplag). N·W·DAMM & SØN.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2006). Nye Mega 8b. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. utgave, 1. opplag). N·W·DAMM & SØN.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007). Nye Mega 9a. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. utgave, 2. opplag). N·W·DAMM & SØN.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2007). Nye Mega 9b. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. utgave, 1. opplag). N·W·DAMM & SØN.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2008). Nye Mega 10a. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. Utgave, 1 opplag). N·W·DAMM & SØN.

Gulbrandsen, J.E., Melhus, A. & Løchsen, R. (2008). Nye Mega 10b. Matematikk for ungdomstrinnet. (3. Utgave, 1 opplag). N·W·DAMM & SØN.

Læreverkets nettsider: http://www.dammskolen.no/grunnskole/matematikk/nye_mega (besøkt 15.06.09)

Grunnskolerådet.(1987). Veiledning til mønsterplan for grunnskolen 1987. Veiledende årsplaner Matematikk. Oslo: Universitetsforlaget AS.

Hagen, M. B., Carlson, S., Hake, K. og Ôberg, B. (2006). Tetra 8. Matematikk for ungdomstrinnet. Det norske samlaget.

Hagen, M. B., Carlson, S., Hake, K. og Ôberg, B. (2006). Tetra 9. Matematikk for ungdomstrinnet. Det norske samlaget.

Hagen, M. B., Carlson, S., Hake, K. og Ôberg, B. (2006). Tetra 10. Matematikk for ungdomstrinnet. Det norske samlaget.

Læreverkets nettsider: http://tetra.samlaget.no/ (besøkt 18.06.09)

Harper, E. (1987). Ghost of Diophantus. Educational Studies in Mathematics 18.

Hart, K.M.(red), Brown, M.L., Küchemann,D.E., Kerslake,D., Ruddock,G & McCartney,M. (2004). Childrens understanding of Mathematics:11-16.Antony Rowe Publishing Services.

Hauge, R.E. (1997). Bruk av diagnostiske oppgaver i grunnskolen for å kartlegge barns misoppfatninger i algebra. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk, Universitetet i Oslo.

Hjardar, E.og Pedersen, J.(2006). Faktor 1. Matematikk for ungdomstrinnet. Oslo: Cappelen.

Hjardar, E.og Pedersen, J.(2006). Faktor 2. Matematikk for ungdomstrinnet. Oslo: Cappelen.

Hjardar, E.og Pedersen, J.(2006). Faktor 3. Matematikk for ungdomstrinnet. Oslo: Cappelen.

Læreverkets nettsider: http://faktor.cappelendamm.no/ (besøkt 18.06.09)

Holden, I.M. (2004).How to become an Exellent Mathematics Teacher. I Clarke, B., Clarke, D., Emanuelson, G., Johansson, B., Lambdin, D.V., Lester, F., K., Wallby, A. & Wallby, K. (red). International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Göteborg: National Center for mathematics education.

Holme, A. (2007). Da matematikken ble til. N·W·DAM & SØN.

Høyskolen i Buskerud. Matematikksider. http://home.hib.no/al/matematikk/artikler.htm (Besøkt 04.04.08).

Ingebrigtsen, O. og Piene, K. (1939). Aritmetikk – Algebra. For realskolen og Gymnasiets 2 første klasser. Oslo: J. W. Cappelens forlag.

Jenssen, A. B. (1956). Eksamensoppgaver i matematikk ordnet etter vanskelighetsgrad. (3. utgave). Oslo: Fabritius & sønners forlag.

Johnsonbaugh, R. (1984). Discrete Mathematics. (3. edition 1993). Macmillian.

Kaput, J.J. (1989) Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. I Wagner, S & Kieran, C.(red). Research issues in the Learning and teaching of algebra. (2.opplag 1989). Lawrence Erlbaum associates.

Ketterlin-Geller,L., Jungjohann, K., Chard, D.J.& Baker, S. (2007). From Arithmetic to Algebra. Teachers can help students make the transition by developing their algebraic thinking early on. I Educational Leadership (2007) vol.65

Kieran, C. (1989). The Early learning of Algebra: A structural Perspective. I Wagner, S & Kieran, C.(red). Research issues in the Learning and teaching of algebra. (2.opplag 1989). Lawrence Erlbaum associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of School Algebra. I Grouwes, D.A. (red). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillian.

Kieran, C. (1995). A New Look at School Algebra – Past, Present and Future. I Journal of Mathematical Behavior, 14. Study group for Mathematical Behavior

Kieran, C. (2004). Mathematical Consepts at the Secondary Level: The Learning of Algebra and functions.. I Bjuland, R. og Borgersen, H.E. Læering og undervisning av matematikk: Elevers begrepsutvikling. En artikkelsamling til emnene MA-207 / MA-400. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. I Bjuland, R. og Borgersen, H.E. (2004) Læring og undervisning av matematikk: Elevers begrepsutvikling. En artikkelsamling til emnene MA-207 / MA-400. Kristiansand: Høgskolen i Agder.

Kjernsli, M., Lie, S., Olsen, R.V.& Roe, A. (2007). Tid for tunge løft. Norske elevers kompetanse i naturfag, lesing og matematikk i PISA 2006. Oslo: Universitetsforlaget.

KUD, (1921). Undervisningsplan for den treårige middelskole. Kristiania: A.W. Brøggers Boktrykkeri A/S.

KUD, (1964). Læreplan for forsøk med 9-årig skole. Oslo: H. Aschehoug & Co.

KUD, (1971). Mønsterplan for grunnskolen. Midlertidig utgave 1971. Oslo: H. Aschehoug & Co.

KUD, (1974). Mønsterplan for grunnskolen. Oslo: H. Aschehoug & Co.

KUD, (1976). Matematikkplanen for ungdomssteget i grunnskolen. Grøndal & Søn Forlag A.s.

KUD, (1987). M87: Mønsterplan for grunnskolen. Oslo: Kirke og Undervisningsdepartementet og Aschehoug.

KUD, (1995). St.meld.nr.29 (1994-1995). Om prinsipper og retningslinjer for 10-årig grunnskole - ny læreplan. http://www.regjeringen.no/nb/dep/kd/dok/regpubl/stmeld/1994-1995/Stmeld-nr-29-1994-95.html?id=464078

(Besøkt 30.11.08)

KUD, (2006). Læreplanverket for kunnskapsløftet. Oslo: Utdanningsdirektoratet. / http://www.udir.no/templates/udir/TM_Tema.aspx?id=148

(Besøkt 30.11.08)

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Leitzel, J., R. (1989). Critical considerations for the future of algebra. ?. I Wagner, S & Kieran, C. (red). Research issues in the Learning and teaching of algebra. (2.opplag 1989). Lawrence Erlbaum associates.

Linchevski, L. (1995). Algebra With Numbers and Arithmetic With Letters: A Definition of Pre-Algebra. I Journal of Mathematical behaviour 14 nr.1.

Lindstrøm, T. (1995). Kalkulus. Oslo: Universitetsforlaget.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algenbra. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Mason, J., Graham, A. & Johnston-Wilder, S. (2005). Developing Thinking in Algebra. Paul Chapman Publishing.

Mellin-Olsen, S. og Linden, N. (1992). Perspektiver på matematikkvansker. (2 opplag 2001). Caspar forlag as.

Mensas hjemmeside. http://www.mensa.no/cms/ (Besøkt 30.01.09)

Mork, J. (1997). Forståelse av algebra. Hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk, Høyskolen i Buskerud.

Myrmo, E. (1971). Hva er moderne matematikk? En innføring for lærere og foreldre. Oslo: Gyldendal norsk forlag.

Niss, M. (2001). Mål for matematikkundervisningen. I Grevholm, B. (red). Matematikk for skolen. Fagbokforlaget.

Norstein, A. (1999). Algebra. Omgrepsutvikling og arbeidsmåtar. Heftet er del i serien ”Notat” fra Høgskulen i Sogn og Fjordane.

Norstein, A. (1998). Med rekneark som hjelpemiddel i algebraundervisninga. Hovedfagsoppgave i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder.

Noss, R. (2001). For a learnable mathematics in the digital culture. I ”Educatinal studies in Mathematics 48”. (2002) Kluwer Academic Publishers.

Nygaard, O., Hundeland, P. S. og Pettersen, P. (1998). Aha. Matematikk og matematikkdidaktikk. (2. utgave, 1.opplag 1999). Høyskoleforlaget AS – Nordic Academic press.

Nygaard, O. og Pettersen, P. (2000). Fatte Matte. For deg som vil tette huller i elementære mattematikkunnskaper. Høyskoleforlaget AS – Nordic Academic press.

Nygaard, O. og Zernochow, A. G. (2006). Den blokkerende misoppfatning. Publisert i Spesialpedagogikk (2006). Temanummer Matematikkvansker. Tilgjengelig på Høgskolen i Agder sin nettsider: blokkerende misoppfatning (Besøkt 30.01.09)

Onstad, T. (1994). Fra Babel til Abel. Likningenes historie. Oslo: NKS-Forlaget.

Pedersen, V. I. (1996). Funksjoner i ungdomsskolen – et abstrakt begrep eller et konkret objekt? En analyse av innføringen i funksjonsbegrepet på ungdomstrinnet. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk, Universitetet i Oslo.

Rasch-Halvorsen, A. (1997). Funksjoner i grunnskolen. Elevers møte med funksjonsbegrepet. Hovedfagsoppgave i realfagsdidaktikk, Universitetet i Oslo.

Rojano, T. (1996). The role of problems and problemsolving in the develpment of algebra. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Selvik, B. K., Rinvold, R. og Høines, M. J.(1998). Matematiske sammenhenger. Algebra og funksjonslære. (3. utgave 2007). Bergen: Caspar forlag.

Sfard, A. 1991. On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the same Coin. I "Educational studies in Mathematics" nr: 22 i 1991. Kluwer Acadenic Publishers.

Sfard, A. 1992. Operational origins of Mathematical notions and quandary of reification – the case of function. I E. Dubinsky, Guershon Harel (red) The Consept of function, Aspect of epistemology and pedagogy, MAA notes, Vol. 25, Mathematical Association of America.

Sfard, A. 1995. The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. I "Journal of Mathematical Behavior" nr: 14 i 1995.

Sfard, A. (2000). Symboliizing Mathematical Meaning into Being- Or – How mathematical Objects Creat Each other. I Cobb, P., Yackle, E., McClain, K. (red): Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms. Mahwah, NL: Lawrens Erlbaum.

Sjøberg, S. 1998. Naturfag som allmenndannelse – en kritisk fagdidaktikk. 2 utgave 2004. Oslo. Gyldendal akademisk.

Skrunes, M. (1996). Matematikkfaget i ungdomsskolen - moderne matematikk, differensieringsproblemet og noen sentrale rammefaktorer. Hovedfagsoppgave i pedagogikk, Universitetet i Oslo.

Solvang, R. (1969). Forsøkstekst i moderne matematikk for 7.-9. klasse. Algebra del 2 og geometri for 7. klasse. Oslo: Forsøksrådet for skoleverket.

Stephens, M. (2004). The importans of Generalisable Numerical Expressions. I Clarke, B., Clarke, D., Emanuelson, G., Johansson, B., Lambdin, D.V., Lester, F., K., Wallby, A. & Wallby, K. (red). International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Göteborg: National Center for mathematics education.

Stephens, A., C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? Journal of Mathematical Behavior 3 (2008).

Store norske leksikons nettsider; http://www.snl.no/algebra, besøkt 15/04-2010. Aschehoug og Gyldendal forlag.

Svege, E. & Thorvaldsen, S. Algebraen historie. http://www.afl.hitos.no/mahist/algebra/ (Besøkt 04.04.08).

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What Should We Teach and How Should We Teach It?. I Wagner, S & Kieran, C.(red). Research issues in the Learning and teaching of algebra. (2.opplag 1989). Lawrence Erlbaum associates.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2006). 8A Sirkel. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2006). 8B Sirkel. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2006). 8A Sirkel. Lærerveiledning. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2007). 9A Sirkel. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2007). 9B Sirkel. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Thorildsen, S. H. Og Maugesten, M. (2008). 10B Sirkel. Matematikk for ungdomstrinnet. Aschehoug.

Læreverkets nettsider:
http://www.lokus123.no/?marketplaceId=123&languageId=1&siteNodeId=2077361 (besøkt 22.06.09)

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra. I Wagner, S. & Kieran, C.(red). Research issues in the Learning and teaching of algebra. (2.opplag 1989). Lawrence Erlbaum associates.

Wheeler, D.(1996). Backwards and forwards: Reflections on different approaches to algebra. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red). Approaches to Algebra. Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers.

Vedlegg

Algebra undersøkelse

I denne undersøkelsen møter du både matematikkoppgaver (Del 2) og spørsmål om hva du mener og tenker (Del 1).

Noen av oppgavene vil ha en form som du kjenner, andre kan virke fremmede. Forsøk å svare på oppgavene så godt du kan, selv om noen kan være vanskelige. Hvis du ønsker å kladde kan du gjøre dette i margen eller på eget ark som du også leverer.

Det er fint om du svarer så godt du kan også på spørsmål om hva du mener eller tenker. I disse spørsmålene er undersøkelsen på jakt etter hvordan du opplever algebra og da finnes det selvfølgelig ingen fasit eller riktige svar.

Fornavn: ___________________________

Del 1.

1). En forklaring av begrepet Algebra, er bokstavregning. Hva mener du om disse påstandene:

Ta stilling til påstandene	**Helt enig**	**Litt enig**	**Usikker**	**Litt uenig**	**Helt uenig**
Algebra er lett					
Jeg forstår algebra godt					
Algebra er noe av det jeg liker minst i matematikkfaget					
Jeg var god i matematikk helt til vi begynte med algebra på skolen					
Algebra er som et nyttig verktøy som hjelper meg å løse problemer					
Det er viktig å bli god i algebra for å bestå eksamen					
Å lære algebra har endret mitt forhold til matematikken					
Algebraoppgaver er mye vanskeligere enn vanlige matematikkoppgaver					
Det er viktig å bli god i algebra for å bli god i matematikk					
Det er ikke så viktig å bli god i algebra for de som ikke skal forsette med matematikk					
Det er viktig å bli god i algebra for å få en god jobb					
Algebra har jeg bare bruk for i matematikktimene					

Algebra er nyttig i flere skolefag					
Algebra har lite med virkeligheten å gjøre					
Jeg ønsker meg et yrke der jeg får bruke algebra					
Jeg har ikke bruk for å lære algebra					
Mine foreldre bruker ikke algebra i sine yrker eller sin hverdag					

2). Ta stilling til påstandene:

Når en skal lære algebra er det viktig:	**Helt enig**	**Litt enig**	**Usikker**	**Litt uenig**	**Helt uenig**
Å lære regler					
Å gruble over problemer					
Å jobbe med oppgaver					
Å lære løsningsmetoder					
Å jobbe med læreboka					
Å få forklart ulike elevers løsning av problemer					
Å gjøre lekser					
Med tavleundervisning og klassesamtale					
Å ha medfødt evner					
Å bruke logikk					

3). I matematikken synes jeg at algebra er nærest tilknyttet – sett kryss ved det eller de tingene du mener henger mest sammen med algebra.

A) Geometri

B) Funksjoner

C) Bevis

D) Problemløsning

E) Å beskrive problemer

F) Likningsløsning

G) Regneregler

H) Annet:

____

4). Ta stilling til de 4 ulike måtene å beskrive sammenhengen på. Avgjør og sett ring omkring det du synes er den beste måten å vise sammenhengen på:

Sammenhengen er slik: Pelle og Bjørn hadde inngått en avtale om å dele alle klinkekuler de hadde eller kunne få, slik: 3 til Bjørn og 1 til Pelle.

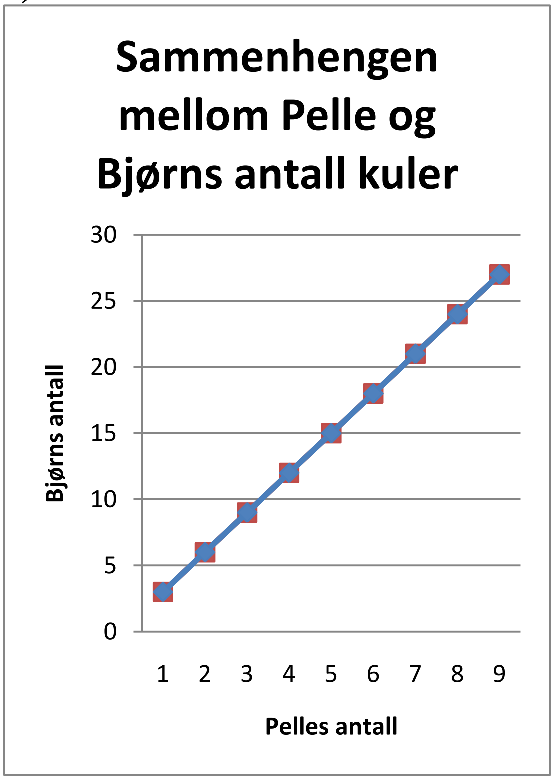
a) Bjørn har tre ganger så mange kuler som Pelle

b) Om B = Bjørns antall kuler, P = Pelles antall kuler, da er:
B = 3 • P

c)

Bjørns antall kuler	**3**	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**	**21**	**24**	**27**
Pelles antall kuler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

d)



e) Begrunn valget ditt:

Del 2

Oppgave 1

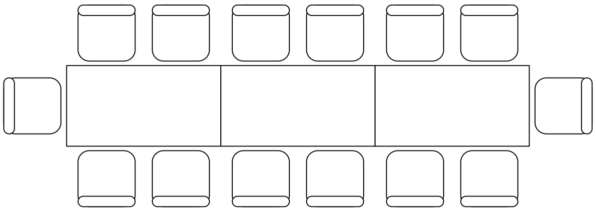
a) $3 \cdot \square = 21$

c) $25 - 2 \cdot \square = 17$

b) $\square \cdot 2 + 4 = 12$

Oppgave 2

Et langbord er satt sammen av småbord. Rundt det lange bordet er det satt stoler slik:



a) **Hvor mange stoler er det plass til om vi har 4 småbord?.......................**

b) **Hvor mange stoler blir det plass til, om vi har 25 småbord?**

..

c) **Forklar hvordan du kom fram til svaret i b)**

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Oppgave 3.

Skriv en matematikkfortelling som passer til dette uttrykket:

$3a + 2a = 5a$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Oppgave 4

a) **Legg sammen $6n$ og $3n$** svar:……………………………….

b) **Legg sammen 2 og $n + 5$** svar:……………………………….

c) **Legg sammen 4 og $3n$** svar:………………………………..

Oppgave 5

a) **Hvis $a + b = 43$ så er $a + b + 2 =$ ……………………..**

b) **Hvis $e + f = 8$ så er $e + f + g =$ ………………………**

Oppgave 6

a) $a + b + c = c + a + b$

□ **Dette er alltid sant.**

□ **Dette er aldri sant**

□ **Dette kan være sant**

Forklar hvordan du kom fram til svaret:……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………

b) $4 + x = 4 + y$

□ **Dette er alltid sant.**

□ **Dette er aldri sant**

□ **Dette kan være sant**

Forklar hvordan du kom fram svaret:
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………

c) $2a + 3 = 2a – 3$

□ **Dette er alltid sant.**

□ **Dette er aldri sant**

□ **Dette kan være sant**

Forklar hvordan du kom fram til svaret:……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………
……………………………

d) l + m + n = l + n

□ Dette er alltid sant.

□ Dette er aldri sant

□ Dette kan være sant.

Forklar hvordan du kom fram til svaret:………………………

……………………………

……………………………

……………………………

……………………………

Oppgave 7

Sett inn tallene og regn ut:

a) a = 1, b = 2 og c = 3

a + b + c = ………………………………

b) b = 2

b^3 = ……………………………………..

c) 3x = 7 og 5y = 11

3x + 5y = ………………………………..

d) a = 10 og b = 2

a – 3b = …………………………………

e) Ivar har en årslønn på x kroner.
Roalds årslønn er dobbelt så stor som Ivars årslønn.

Hva er Roalds årslønn uttrykket ved x? ....

Oppgave 8

Gulrøtter koster 13 kroner per kg og poteter koster 5 kroner per kg.

c) Hvis g står for hvor mange kg gulrøtter som blir kjøpt, og p står for hvor mange kr poteter som blir kjøpt, hva står da dette for:

13g + 5p

…………………………………………………………………………………….

d) Hvor mange kg ble kjøpt til sammen? ……………………..................

Oppgave 9

a) Hanna er 3 år eldre enn Bent, som er dobbelt så gammel som Marie.

Dersom de 3 til sammen er 38 år, hvor gammel er hver av dem da?

....

....

....

....

....

....

b) Hvordan kom du frem til svaret?

....

....

....

....

c) Dersom Bent og Hanna til sammen var 45 år. Hvor gammel var da Marie?

....

....

....

....

d) Hvordan kom du frem til svaret?

....

....

....

....

Oppgave 10

a)

Noen elever ble bedt om å oversette følgende sammenheng fra ord til symboler.

"Et rektangel er fem ganger så langt som det er bredt."

Lisa skrev følgende uttrykk: $l = 5 \cdot b$

Knut skrev følgende uttrykk: $5 \cdot l = b$

Marker ditt svar

1) **Lisa hadde funnet et godt uttrykk for sammenhengen**

2) **Knut hadde funnet et godt uttrykk for sammenhengen**

3) **Begge hadde funnet like gode uttrykk for sammenhengen**

b)

En sammenheng er beskrevet slik:

"I en klasse er det dobbelt så mange øyne som neser."

Ola beskrev sammenhengen slik: 2 • Ø = N

Hva står bokstavene for?

Ø…………………………………………………..

N…………………………………………………..

c)

Lag en regnefortelling.

Det vil si for bokstavuttrykket nedenfor skal du tenke deg en mulig situasjon som uttrykket kan beskrive. Bestem selv hva bokstavsymbolet kan stå for.

e) $N = 3 \cdot b$

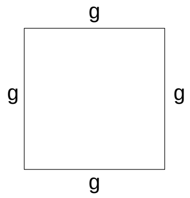
……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

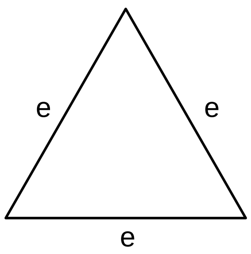
Oppgave 11



Eksempel:
Dette kvadratet har sidene som er g meter lange.
Omkretsen kan vi da skrive som O = g + g + g + g =__________________

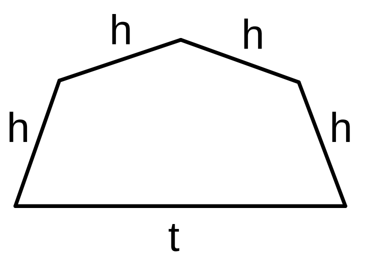
For alle figurene nedenfor er sidene oppgitt i meter.
Skriv omkretsen for hver av figurene:

a)



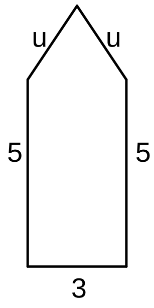
O = ________________________

b)



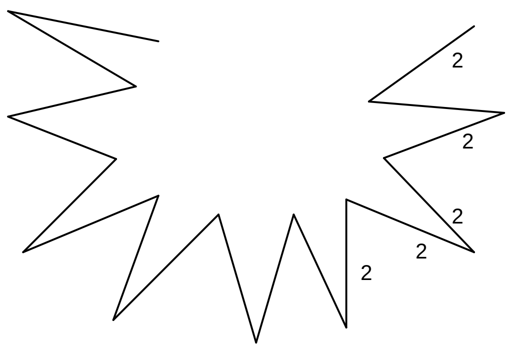
O = _______________________________

c)



O = _________________________

d) Deler av denne figuren er ikke tegnet. Det er n sider til sammen, som alle har lengde 2



O = ________________________________